2016 年 4 月 14 日

学術俯瞰講義「図形から拡がる数理科学」

多面体をめぐって

金井雅彦

第２回講義で証明のできなかった以下の主張の証明の方針を示すことが，このノートの目的である．

命題１

Γ, Γ' を球面 n 角形[1] とする．さらに，それらはともに凸である[2] と仮定する．Γ の頂点を $\mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_n$ と，また Γ' の頂点を $\mathrm{A}'_1, \cdots, \mathrm{A}'_n$ としよう．さらに，これらふたつの多角形の対応する辺の長さは等しいと仮定する：

$$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 = \mathrm{A}'_1\mathrm{A}'_2, \quad \cdots\cdots, \quad \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n = \mathrm{A}'_{n-1}\mathrm{A}'_n, \quad \mathrm{A}_n\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}'_n\mathrm{A}'_1.$$

各 $k = 1, \cdots, n$ に対し，内角 $\angle\mathrm{A}_k$ と $\angle\mathrm{A}'_k$ の間に $\angle\mathrm{A}_k > \angle\mathrm{A}'_k$ なる関係があるときには，頂点 A_k に符号 $-$ をあたえる．また逆に $\angle\mathrm{A}_k < \angle\mathrm{A}'_k$ なる関係があるときには，符号 $+$ を与えることにする．そして，$\angle\mathrm{A}_k = \angle\mathrm{A}'_k$ の場合には符号を与えないこととする．いま，Γ の頂点のうち少なくともひとつが符号を有すると仮定する．このとき，頂点 A_1 から出発し，頂点 $\mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_n$ を回り，最後に再び頂点 A_1 に戻ったときに符号が何回変化するか，その変化の回数は常に 4 以上である．ただし符号の変化の回数を数えるにあたって，符号の付いていない頂点は無視するものとする．

¥

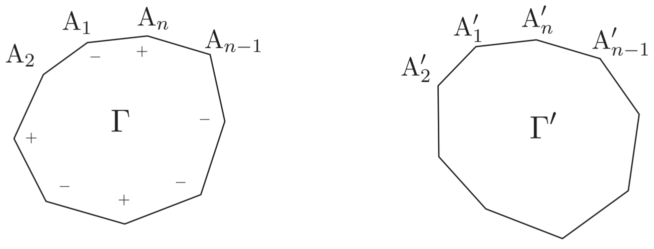

図 1: 命題１

[1] このノートにおいては，**球面多角形**と言ったときには，その内部が指定されていると考える．

[2]（単位）球面内の（境界を含まない）半球面 H を考える．その半球面内の相異なる 2 点 P, Q に対し，それらを通る大円 C が一意的に存在する．しかも，大円 C から P, Q を除いて得られるふたつの弧の長さは等しくない．短い方 — これを（2 点 P, Q を結ぶ）**大円劣弧**と呼ぶことにしよう — は半球面 H に含まれる．球面多角形 Π に対し，以下が成り立つとき，Π は**凸**であると言われる：(i) Π はある（境界を含まない）半球面 H に含まれる；(ii) Π の内部の相異なる任意の 2 点に対し，それらを結ぶ大円劣弧は Π の内部にとどまる．

命題１は球面多角形に関するものであったが，同様なことが平面内の多角形に対しても成立する．すなわち，次が成り立つ．

命題２

Γ および Γ' を平面内の凸 n 角形とする．Γ の頂点を順に $\mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_n$ と，また Γ' の頂点を順に $\mathrm{A}'_1, \cdots, \mathrm{A}'_n$ とする．さらに，

$$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 = \mathrm{A}'_1\mathrm{A}'_2, \quad \cdots\cdots, \quad \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n = \mathrm{A}'_{n-1}\mathrm{A}'_n, \quad \mathrm{A}_n\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}'_n\mathrm{A}'_1.$$

とする．ただし Γ と Γ' は合同ではないと仮定する．Γ の各頂点 A_k に命題１と同じ仕方で符号を与えるたとき，Γ の周を 1 周したときの頂点の符号の変化の回数は 4 以上である．

これらふたつの命題の証明を比べたとき，命題２の証明の方が若干記述が容易である．平面図形の方が球面図形より絵が描きやすいというのがその理由のひとつである．そこで，ここでは命題１の証明を与える代わりに，命題２の証明を行いたいと思う．その準備として，補題をひとつ用意する．

補題

Γ および Γ' を平面内の凸 n 角形とする．Γ の頂点を順に $\mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_n$ と，また Γ' の頂点を順に $\mathrm{A}'_1, \cdots, \mathrm{A}'_n$ とする．さらに，

$$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 = \mathrm{A}'_1\mathrm{A}'_2, \quad \cdots, \quad \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n = \mathrm{A}'_{n-1}\mathrm{A}'_n,$$
$$\angle\mathrm{A}_2 \geq \angle\mathrm{A}'_2, \quad \cdots, \quad \angle\mathrm{A}_{n-1} \geq \angle\mathrm{A}'_{n-1}$$

と仮定する（図 2）．このとき，

$$\mathrm{A}_n\mathrm{A}_1 \geq \mathrm{A}'_n\mathrm{A}'_1$$

が成り立つ．しかも等号 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}'_n\mathrm{A}'_1$ が成立するのは，$\angle\mathrm{A}_1 = \angle\mathrm{A}'_1, \cdots, \angle\mathrm{A}_n = \angle\mathrm{A}'_n$ が成り立つときのみである．

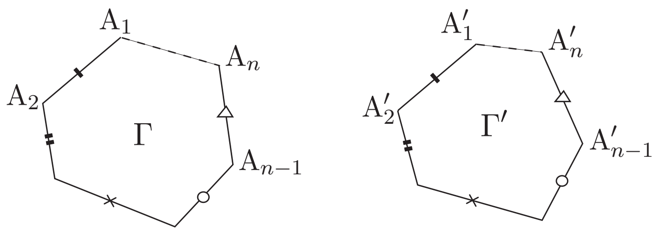

図 2: 補題

この補題の証明は後回しにして，命題２の証明を行おう．

命題２の証明．まず，符号の変化の総数は常に偶数であることに注意しよう．従ってもし符号の変化の回数が 4 未満であるならば，その値はゼロないし 2 でなければならない．仮にその値がゼロであるとすると，Γ の頂点に与えられている符号はすべて $+$ であるか，すべて $-$ でなければならない．すると，補題により，すべて $+$ のときには $A_nA_1 < A'_nA'_1$, またすべて $-$ のときには $A_nA_1 > A'_nA'_1$ となり，いずれにせよ仮定 $A_nA_1 = A'_nA'_1$ に矛盾する．したがって，符号の変化の回数が決して 2 とはならないことを示せばよい．

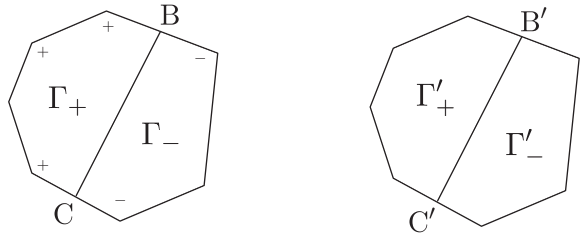

図 3: 命題２の証明 — 指数が２の場合

いま仮に符号の変化の回数が 2 であるとする．すると，多角形 Γ の周に 2 点 B, C を適当にとることにより，多角形 Γ の周を符号が $+$ の頂点だけを含む部分と符号が $-$ の頂点を含む部分とに分けることが可能である（図３）．さらに点 B, C は Γ のある辺の中点であるとする．多角形 Γ' にも対応する点 B', C' をとる．さらに線分 BC により凸多角形 Γ をふたつの凸多角形 Γ_+, Γ_- に分割する．ただし，もとの多角形 Γ の頂点 $\mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_n$ のうち，$+$ の符号が付いたものは Γ_+ に含まれ，一方 $-$ の符号が付いたものは Γ_- に含まれるとする．これに対応して，多角形 Γ' も線分 $\mathrm{B}'\mathrm{C}'$ により，ふたつの凸多角形 Γ'_+, Γ'_- に分割される．凸多角形 Γ_- および Γ'_- に対し補題を適用すれば，$\mathrm{BC} > \mathrm{B}'\mathrm{C}'$ を得る．一方，凸多角形 Γ_+ と Γ'_+ に対し補題を適用すると，$\mathrm{BC} < \mathrm{B}'\mathrm{C}'$ が従う．ところが，これは明らかに矛盾である．以上で命題２が正しいことが証明された． □

さて，最後に補題の証明を行わなければならない．

補題の証明．n に関する帰納法による．$n = 3$ のときには補題の成立は明らかである．凸 n 角形に対して補題が成立すると仮定して，凸 $n+1$ 角形に対しても同様な主張が成り立つことを示そう．以下ふたつの場合に分けてこれを実行する．

場合１．ある番号 $k(= 2, \cdots, n)$ に対して $\angle \mathrm{A}_k = \angle \mathrm{A}'_k$ が成立する場合．この場合には凸 $n+1$ 角形 Γ および Γ' から $\triangle \mathrm{A}_{k-1}\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}$ および $\triangle \mathrm{A}'_{k-1}\mathrm{A}'_k\mathrm{A}'_{k+1}$ を切り落とすことにより得られるふたつの凸 n 角形に対し，帰納法の仮定を適用すればよい（図４）．

場合２．すべての番号 $k = 2, \cdots, n$ に対し，$\angle \mathrm{A}_k > \angle \mathrm{A}'_k$ が成り立つ場合．このときにはさらに

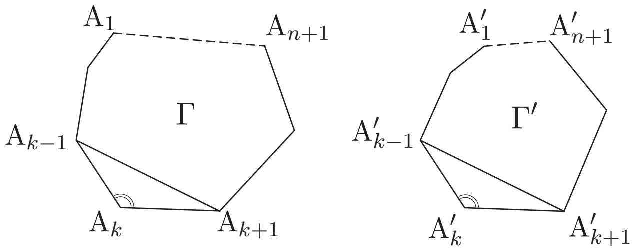

図 4: 補題の証明 — 場合 1

次のような場合分けが必要である．多角形 Γ' に含まれる $\triangle A'_{n-1}A'_nA'_{n+1}$ を点 A'_{n-1} を中心として適当な角度回転させ，その結果得られる新たな $n+1$ 角形の頂点 A'_{n-1} における内角が $\angle A_{n-1}$ に等しくなるようにしたとする（図 5）．

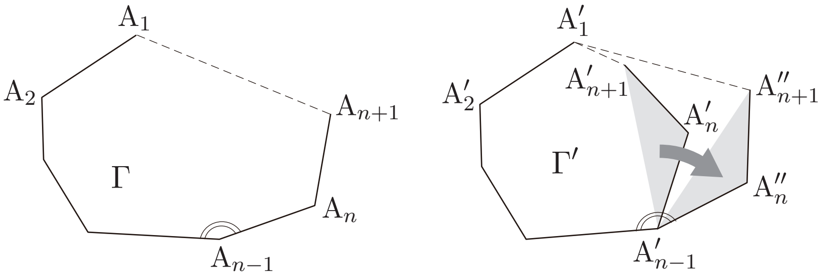

図 5: 補題の証明 — 場合 2

場合 2 a．その新たな $n+1$ 角形が凸である場合．その凸 $n+1$ 角形を Γ'' と呼ぶことにしよう．またその頂点を $A'_1, \cdots, A'_{n-1}, A''_n, A''_{n+1}$ とする（図 5）．このとき

$$A'_1A''_{n+1} > A'_1A'_{n+1}$$

が成り立つ．一方，凸 $n+1$ 角形 Γ'' の頂点 A'_{n-1} における内角と凸 $n+1$ 角形 Γ の対応する頂点 A_{n-1} の内角は等しい．従って，ふたつの凸 $n+1$ 角形 Γ, Γ'' に対し場合 1 の議論を適用することができ，そしてその結果として

$$A_1A_{n+1} > A'_1A''_{n+1}$$

を得る．これと先程の不等式とから示すべき不等式 $A_1A_{n+1} > A'_1A'_{n+1}$ が従う．

場合 2 b．新たに得られた $n+1$ 角形が凸でない場合（図 6(a)）．この場合には，$\triangle A'_{n-1}A'_nA'_{n+1}$ を回転していく途中，3 点 A'_1, A'_2, A'_{n+1} が 1 直線上にある瞬間がある．そのときの点 A'_n, A'_{n+1} の位置を改めて A''_n, A''_{n+1} と記すことにしよう（図 6(b)）．このとき $A'_1A'_{n+1} < A'_1A''_{n+1}$ が成り

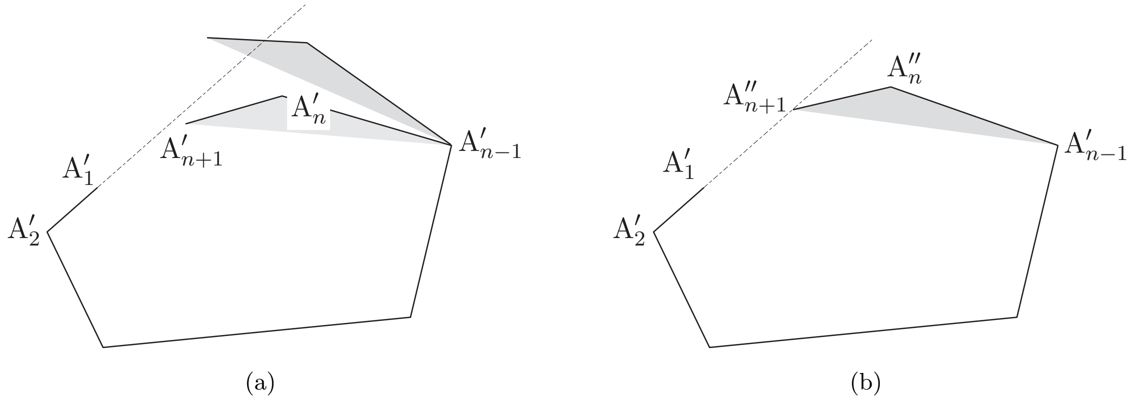

図 6:

立つ．さらに 3 点 A_1', A_2', A_{n+1}'' が 1 直線上にあることから，$\mathrm{A}_1'\mathrm{A}_{n+1}'' = \mathrm{A}_2'\mathrm{A}_{n+1}'' - \mathrm{A}_1'\mathrm{A}_2'$ を得る．以上から，

$$\mathrm{A}_1'\mathrm{A}_{n+1}' < \mathrm{A}_2'\mathrm{A}_{n+1}'' - \mathrm{A}_1'\mathrm{A}_2'$$

が従う．ところが，仮定より $\mathrm{A}_1'\mathrm{A}_2' = \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ である．一方，点 $\mathrm{A}_2', \cdots, \mathrm{A}_n', \mathrm{A}_{n+1}''$ を頂点とする凸 n 角形と点 $\mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_{n+1}$ を頂点とする凸 n 角形に帰納法の仮定を適用することにより，$\mathrm{A}_2'\mathrm{A}_{n+1}'' < \mathrm{A}_2\mathrm{A}_{n+1}$ を得る．従って，

$$\mathrm{A}_1'\mathrm{A}_{n+1}' < \mathrm{A}_2\mathrm{A}_{n+1} - \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 \leq \mathrm{A}_1\mathrm{A}_{n+1}$$

が結論される． □