

クレジット：

UTokyo Online Education 学術俯瞰講義 2016 河野俊丈

ライセンス：

利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限ってページ単位で利用することができます。特に記載のない限り、本講義資料はページ単位でクリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下に提供されています。

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。





4次元多面体から空間のかたちを見る — 宇宙のトポロジー

河野 俊丈

2016年7月14日
学術俯瞰講義「図形から拡がる数理科学」

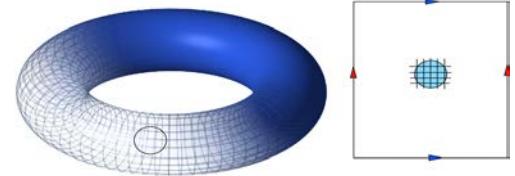
今回の講義のテーマ

- (1) リーマン多様体とは？
- (2) さまざまな曲率の概念とその意味
- (3) ローレンツ変換と双曲幾何学
- (4) アインシュタイン方程式 – 重力と曲率
- (5) 宇宙空間の幾何構造とトポロジー

リーマン多様体とは

各点の周りで座標系

(x^1, x^2, \dots, x^n) と内積が与えられた空間



$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = g_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

内積 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$

リーマン計量の記法 $ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$

\mathbf{a}, \mathbf{b} について線型

$$\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)), \quad a \leq t \leq b$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \geq 0, \quad \text{等号は } \mathbf{a} = 0$$

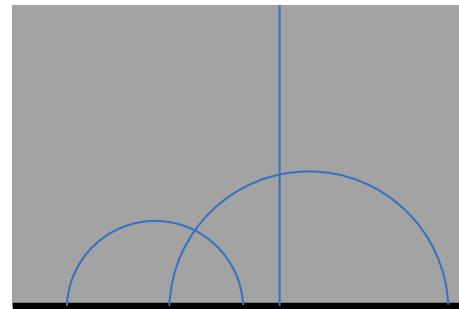
曲線の長さ

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt$$

リーマン計量の例

ユークリッド平面

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

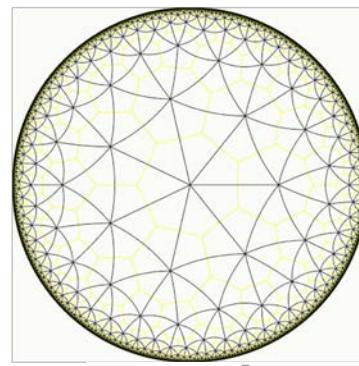


ユークリッド平面
の極座標

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

上半平面
(双曲平面)

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$



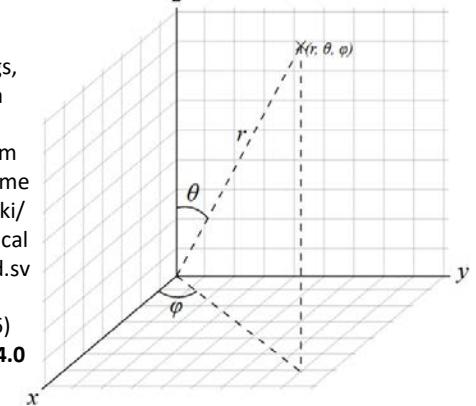
ポアンカレ円板

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

3次元ユークリッド空間の球面座標

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

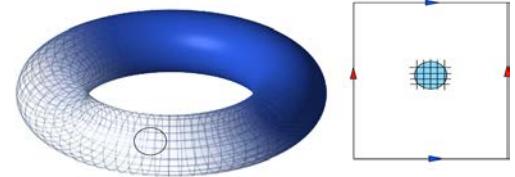
By Andeggs,
Wikimedia
Commons
[https://com
mons.wikime
dia.org/wiki/
File:Spherical
_with_grid.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Spherical_with_grid.svg) (ref.
2016/7/26)
CC BY-SA 4.0



リーマン多様体とは

各点の周りで座標系

(x^1, x^2, \dots, x^n) と内積が与えられた空間



$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = g_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

内積 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$

リーマン計量の記法 $ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$

\mathbf{a}, \mathbf{b} について線型

$$\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)), \quad a \leq t \leq b$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \geq 0, \quad \text{等号は } \mathbf{a} = 0$$

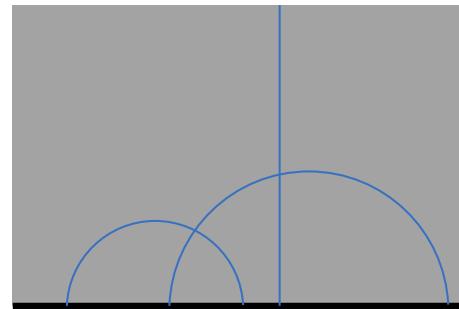
曲線の長さ

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt$$

リーマン計量の例

ユークリッド平面

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

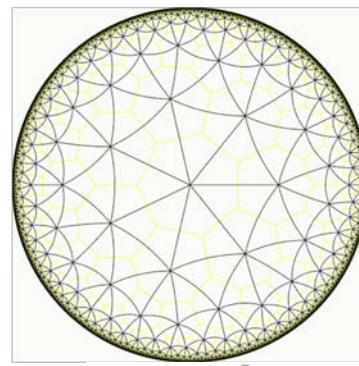


ユークリッド平面
の極座標

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

上半平面
(双曲平面)

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$



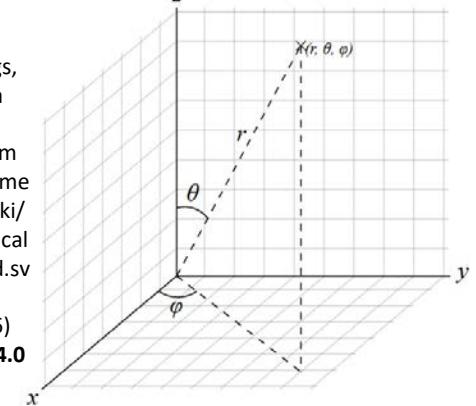
ポアンカレ円板

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

3次元ユークリッド空間の球面座標

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

By Andeggs,
Wikimedia
Commons
[https://com
mons.wikime
dia.org/wiki/
File:Spherical
_with_grid.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Spherical_with_grid.svg) (ref.
2016/7/26)
CC BY-SA 4.0



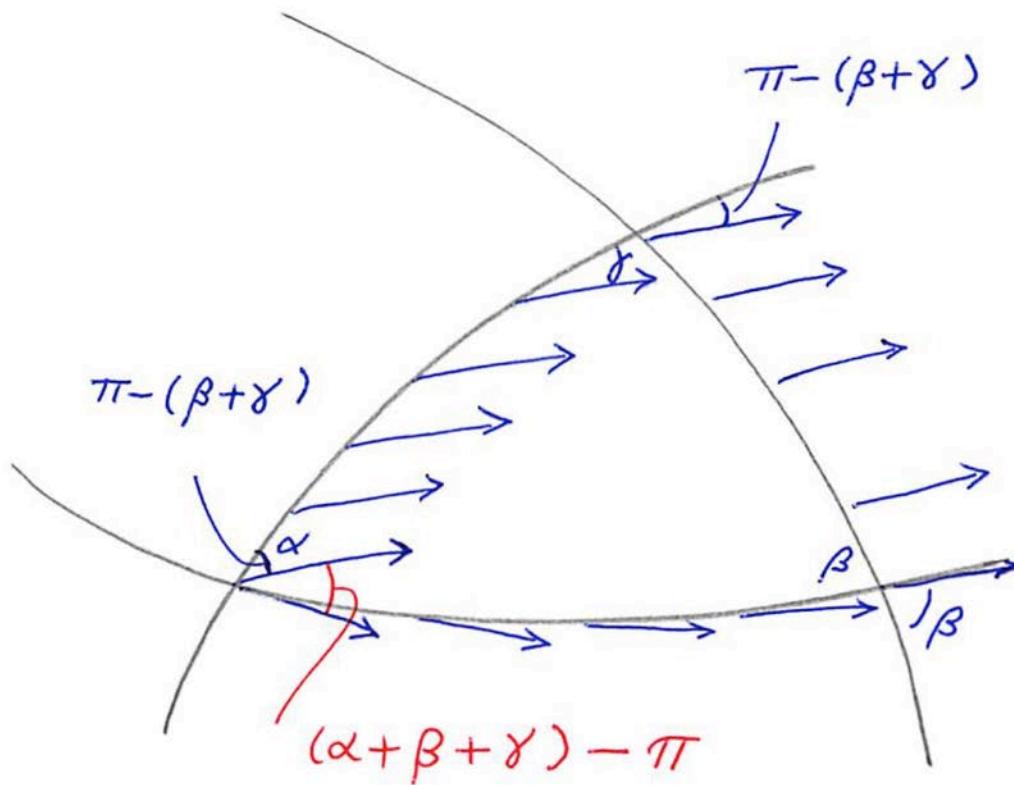
断面曲率

一般的の次元のリーマン多様体では、様々な方向の平面についてこれらのベクトルを初速度とする測地線ではられる曲面のガウス曲率を考える。これを断面曲率という。

リーマンは断面曲率が一定値 K となる空間の計量を与えた。

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left(1 + \frac{K}{4}r^2\right)^2}$$

平行移動による角度のずれと曲率

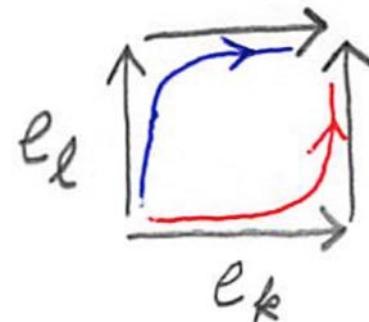


さまざまな曲率の概念

リーマン曲率

$$\mathbf{e}_i \mapsto \sum_m R^m_{ik\ell} \mathbf{e}_m$$

右の2方向についての平行移動によるずれを表す.



リッチ曲率

$$R_{ij} = \sum_k R^k_{ikj}$$

ユークリッド体積に対する体積の増大度の比率を表す.

$$1 - \frac{1}{6} \sum_{ij} R_{ij} x^i x^j + \dots$$

スカラー曲率

$$R = \sum_{i,j} g^{ij} R_{ij}$$

曲面の場合

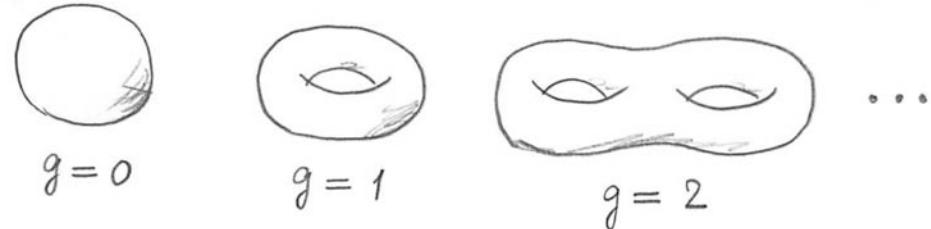
$$K = \frac{R}{2}$$

曲率とトポロジー

内角が α, β, γ の測地三角形 Δ

$$\int_{\Delta} K d\sigma = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$$

ガウス・ボンネの定理



$$\frac{1}{2\pi} \int_M K d\sigma = \chi(M)$$

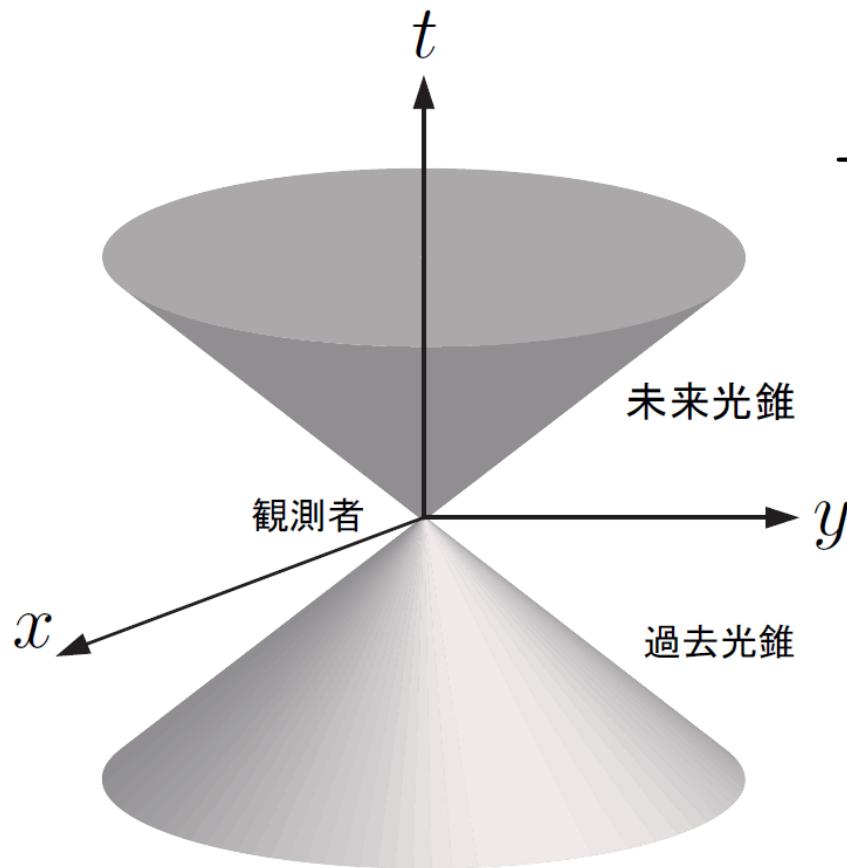
M : 閉曲面
右辺はオイラー数 $2-2g$
曲面のトポロジーを表す.
 g は曲面の種数

定曲率の場合の証明

$A(M)$ は曲面 M の面積

$$KA(M) = 2\pi v - f\pi = 2\pi(v - e + f)$$
$$3f = 2e$$

ミンコフスキー計量と光錐



$$-c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

特殊相対論はミンコフスキー計量を不变にする理論
(光速の不变性)

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \geq 0$ は満たされない場合がある。

ローレンツ変換の例

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(x, y, z)系に対して速度 v で移動する
粒子を原点とする座標系を (x', y', z')

$$c^2 - v^2 t^2 = c^2 t'^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = v^2 t^2$$

移動する粒子の固有時

$$t' = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

双曲幾何とミンコフスキー計量

双曲面 $x^2 + y^2 - t^2 = -1$

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2$$

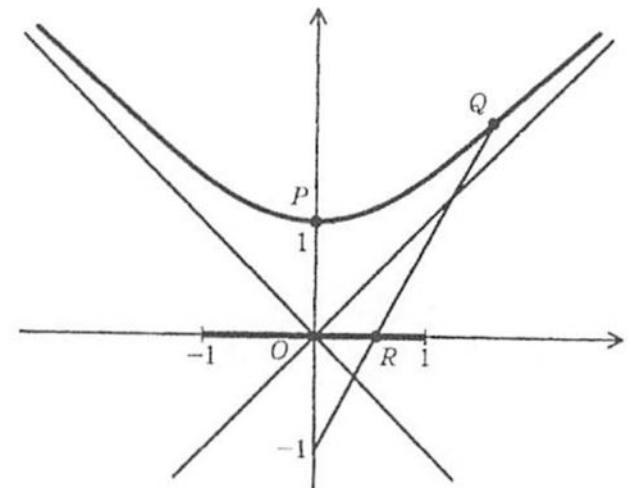
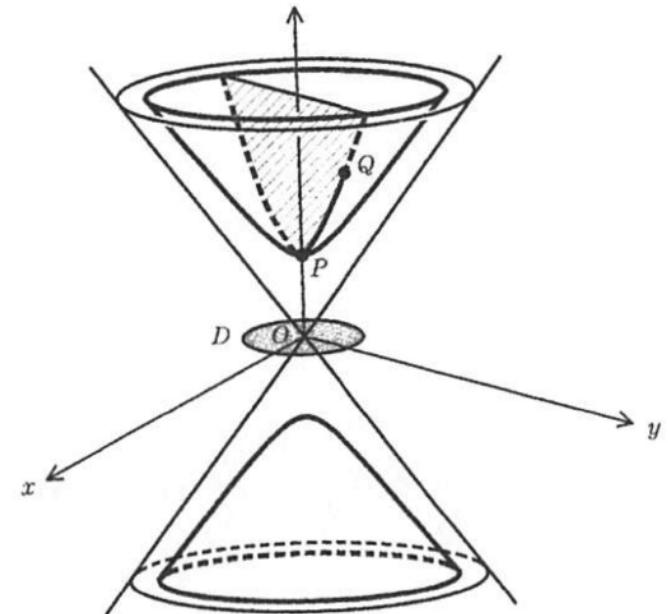
R の座標を $(s, 0)$ とすると Q の座標は

$$\alpha(s) = \frac{2s}{1-s^2}, \quad \beta(s) = \frac{1+s^2}{1-s^2}$$

$$\alpha'(s)^2 - \beta'(s)^2 = \frac{4}{(1-s^2)^2}$$

この計量による OR の長さ

$$2 \int_0^r \frac{ds}{1-s^2} = \log \frac{1+r}{1-r}$$



内在的な微分幾何と相対論

計量から出発した内在的な幾何学はインシュタインの一般相対性理論の成立に影響を与えた.

インシュタイン方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

左辺は4次元時空の曲がり具合を表し、計量で表現される。
右辺は質量、エネルギーの分布を表す。

光の経路は測地線で表される。

シュヴァルツシルトの解

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

重力半径

$$r_g = \frac{2Gm}{c^2}$$

大きな重力によって光が曲げられる。

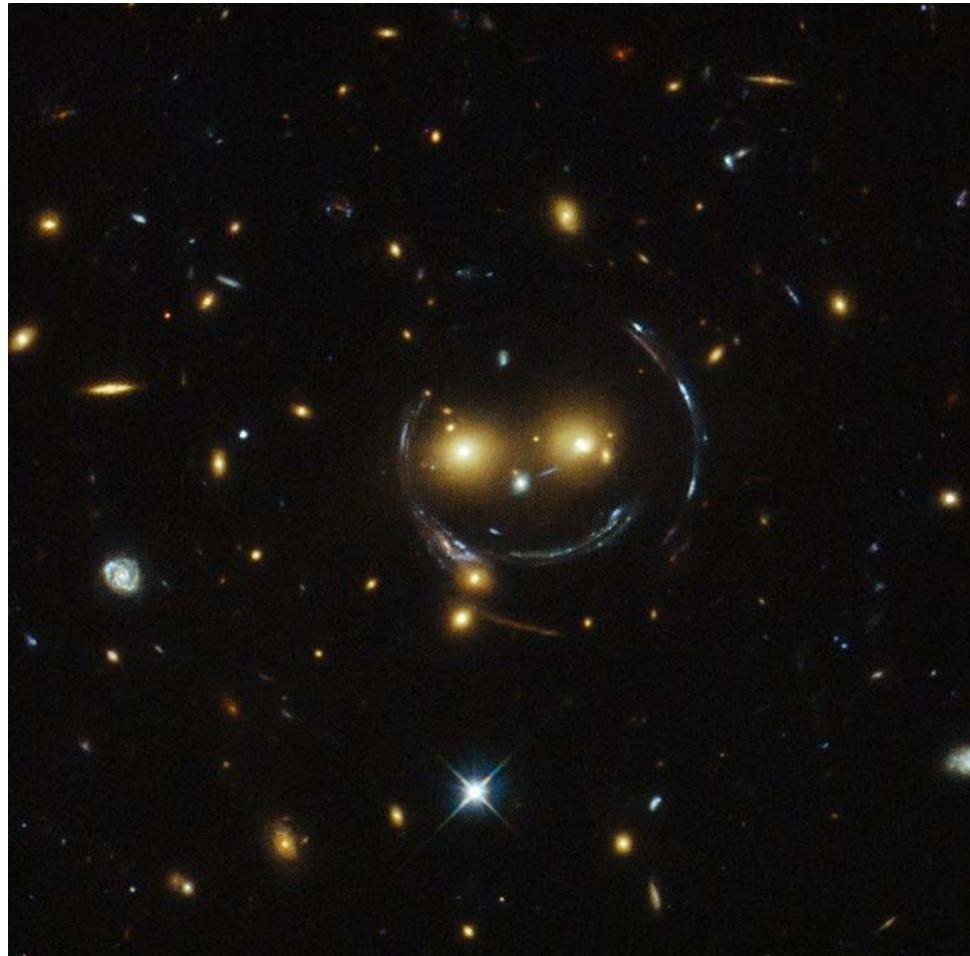
太陽の重力

皆既日食の時太陽の背後にある星を観測

水星の近日点移動

重力レンズ

大きな重力によって空間が歪められ光が曲がって進む

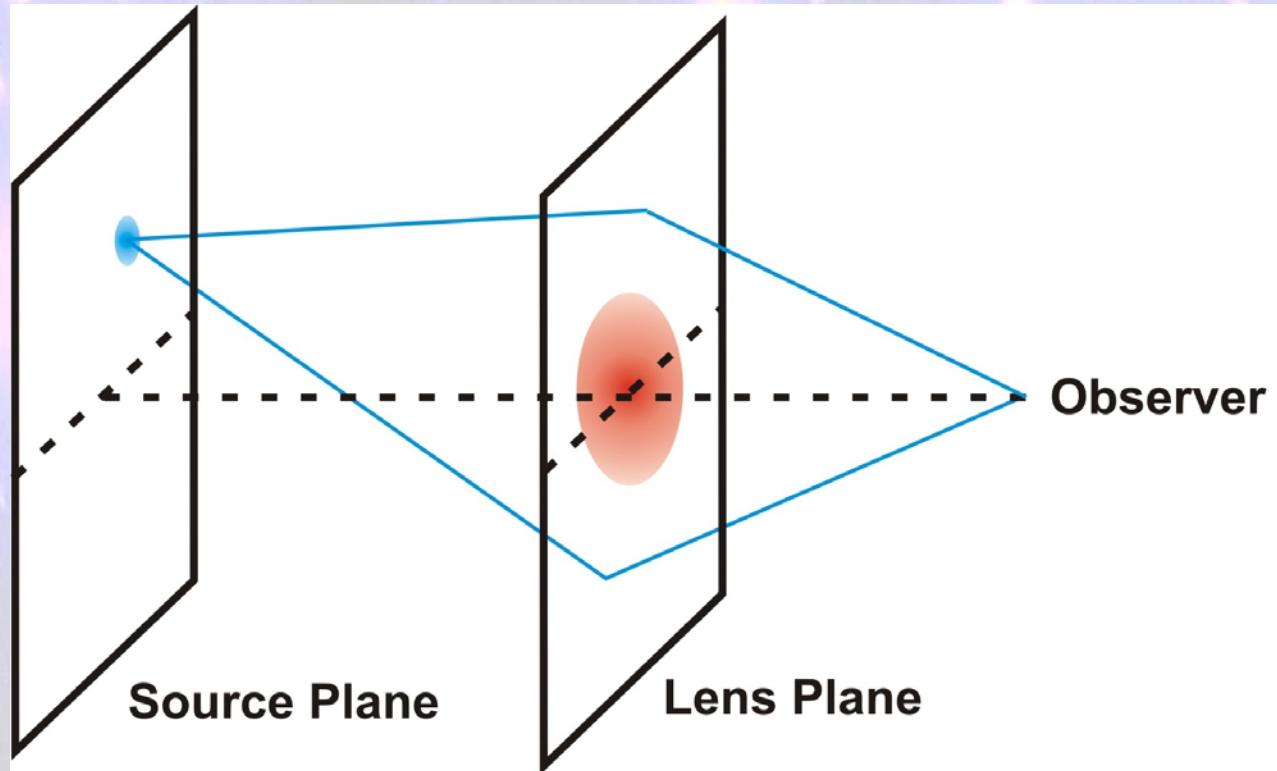


NASA & ESA

Acknowledgement: Judy Schmidt
(geckzilla.org)

重力レンズのしくみ

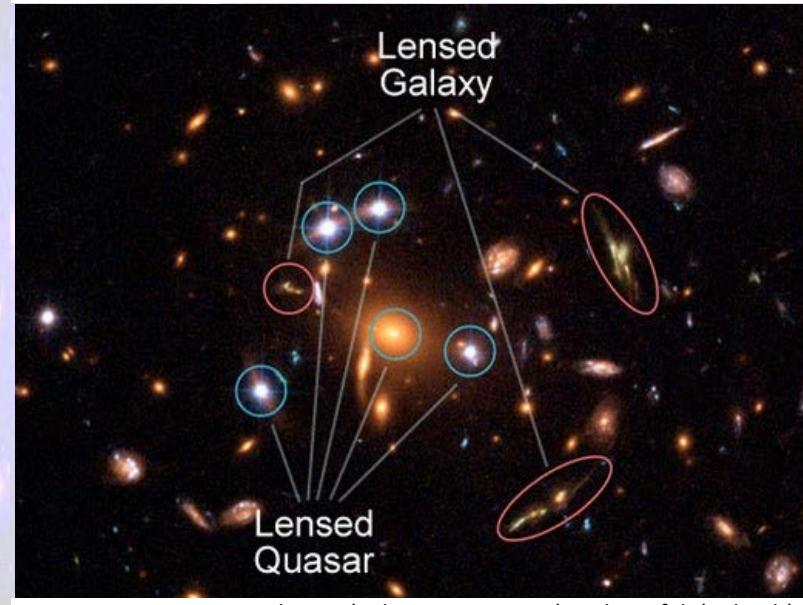
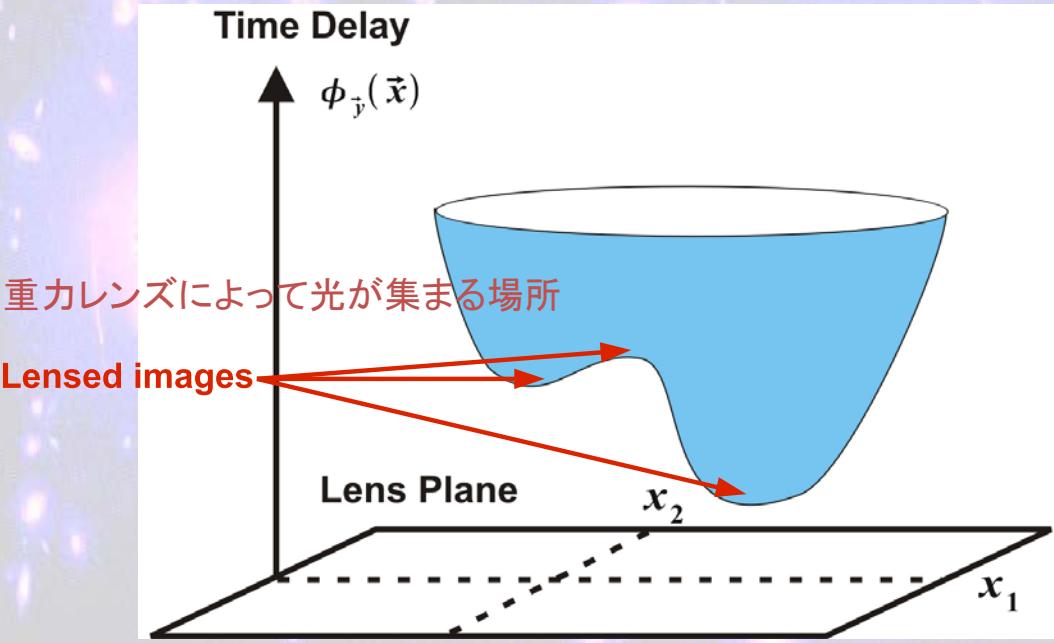
Gravitational lensing theory



Marcus Christian Werner "Gravitational Lensing and Topology" P.11

なぜ同じ銀河が奇数個見えるのか？

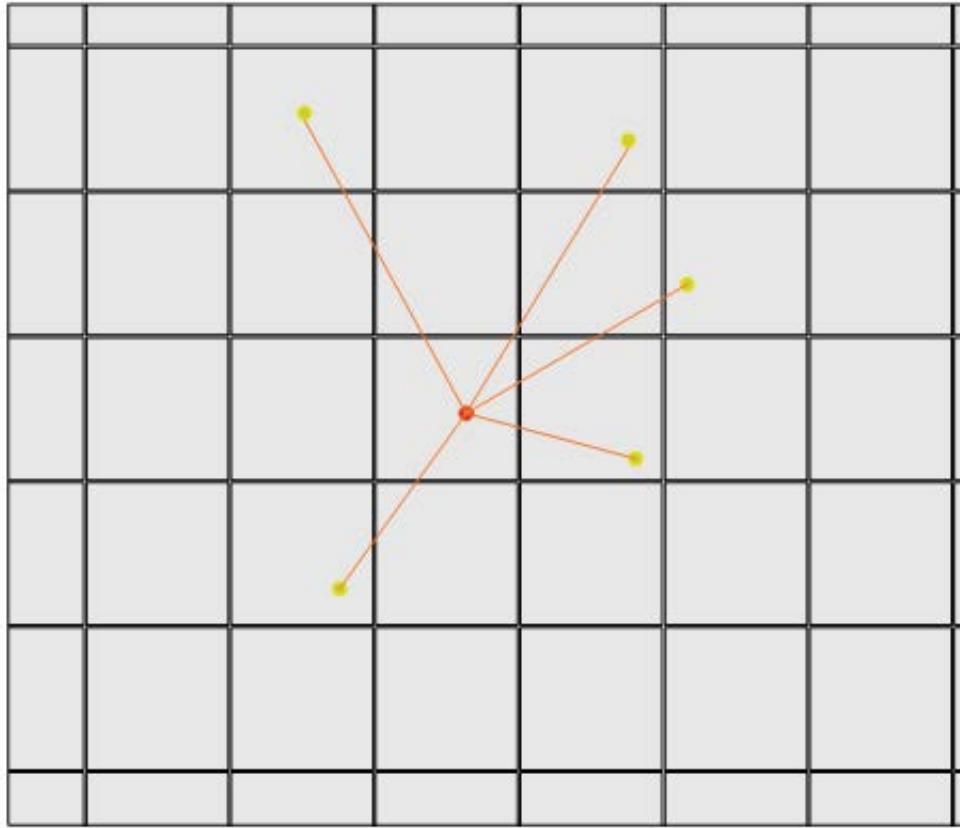
Basic theory: the Fermat surface



Marcus Christian Werner "Gravitational Lensing and Topology" P.12

重力レンズの観測結果をもとに、宇宙の暗黒物質(ダークマター)の分布地図を作る研究がすすんでいる。

幾何構造のモデルの観測

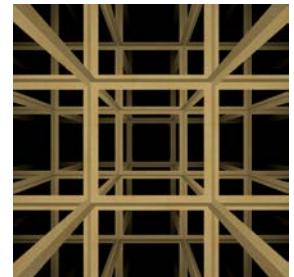


ユークリッド平面はトーラスの幾何構造のモデルである。
トーラスからモデルとなる平面を再現するには、トーラスの
一点について、そこに到達する「光源」すべてを観測すれば
よい。

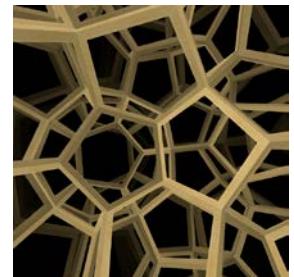
3次元幾何構造のモデル空間

等方性をもつのは次の3通り

3次元ユークリッド空間 曲率 0

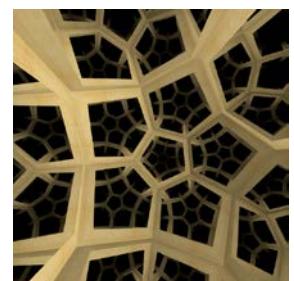


3次元球面 曲率が正の一定値



3次元双曲空間 曲率が負の一定値

J. Weeks "Curved Space"を用いて作成
<http://www.geometrygames.org/CurvedSpaces/index.html.en>



これ以外に1次元と2次元の(捻った)積となるものが5通り存在

ハミルトンの四元数

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j$$

$$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j$$

$$x = a + bi + cj + dk$$

$$|x| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

$$\bar{x} = a - bi - cj - dk$$

a, b, c, dは実数
可換ではないが結合法則, 分配法則
を満たす数の体系

大きさが1の四元数全体は3次元球面
とみなせる。

四元数と回転

単位ベクトル w を軸とする角度 θ の回転は

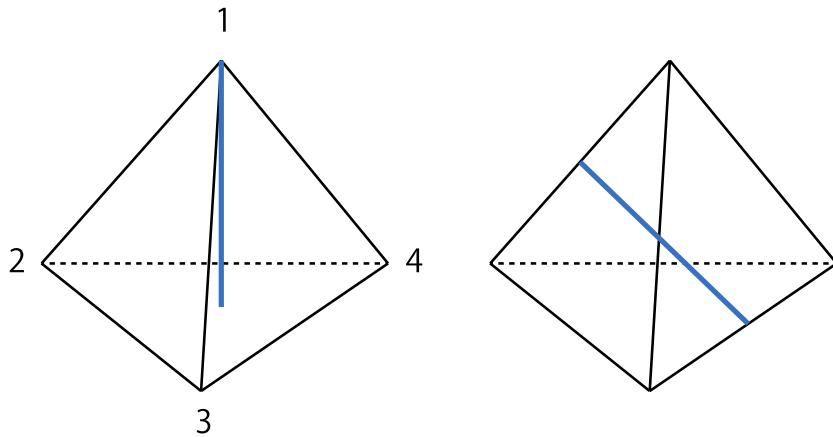
$$g = \cos \frac{\theta}{2} + w \sin \frac{\theta}{2}$$

として

$$\mathbf{x} \mapsto g\mathbf{x}\bar{g}$$

一つの回転に対して四元数が2個ずつ定まる。

正4面体群



正4面体を不变にする回転は12個の要素からなる。

左のようにして、正4面体群の12個の要素から大きさが1の四元数24個が決まる。これらは、正24胞体の頂点をなす。

$\frac{2\pi}{3}$ 回転に対応する四元数

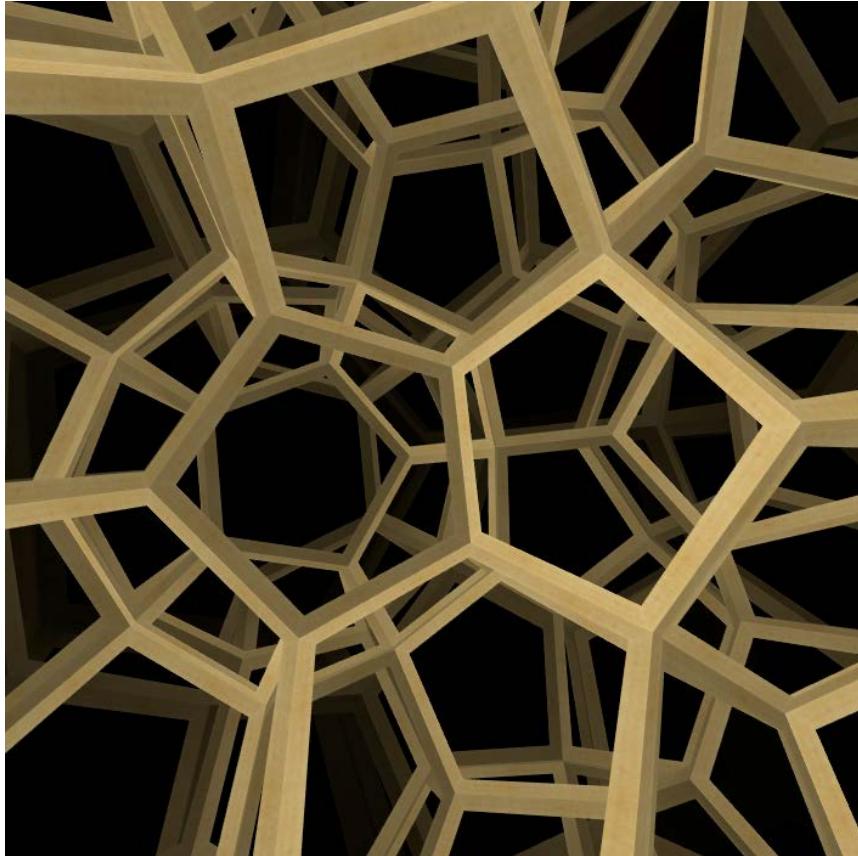
$$\cos \frac{\pi}{3} + \frac{i + j + k}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(i + j + k)$$

正20面体を不变にする回転は60個の要素からなる。これらに対応する120個の四元数は、正600胞体の頂点をなす。

第11回の講義の課題の工作を参考に、正600胞体の頂点の座標を求めてみよう。

3次元球面の正則分割

$\{5, 3, 3\}$

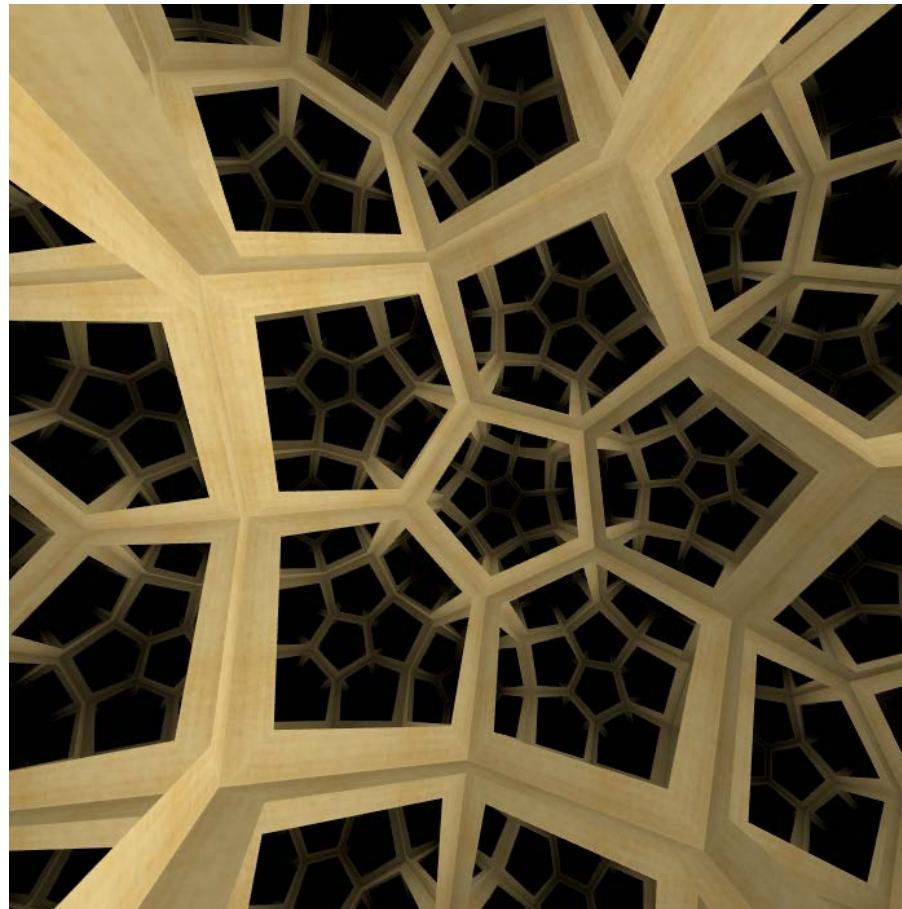


正12面体の対面を
1/10回転してはり合わせものがポアンカレの
正12面体空間

J. Weeks "Curved Space"を用いて作成
<http://www.geometrygames.org/CurvedSpaces/index.html.en>

双曲空間の正則分割

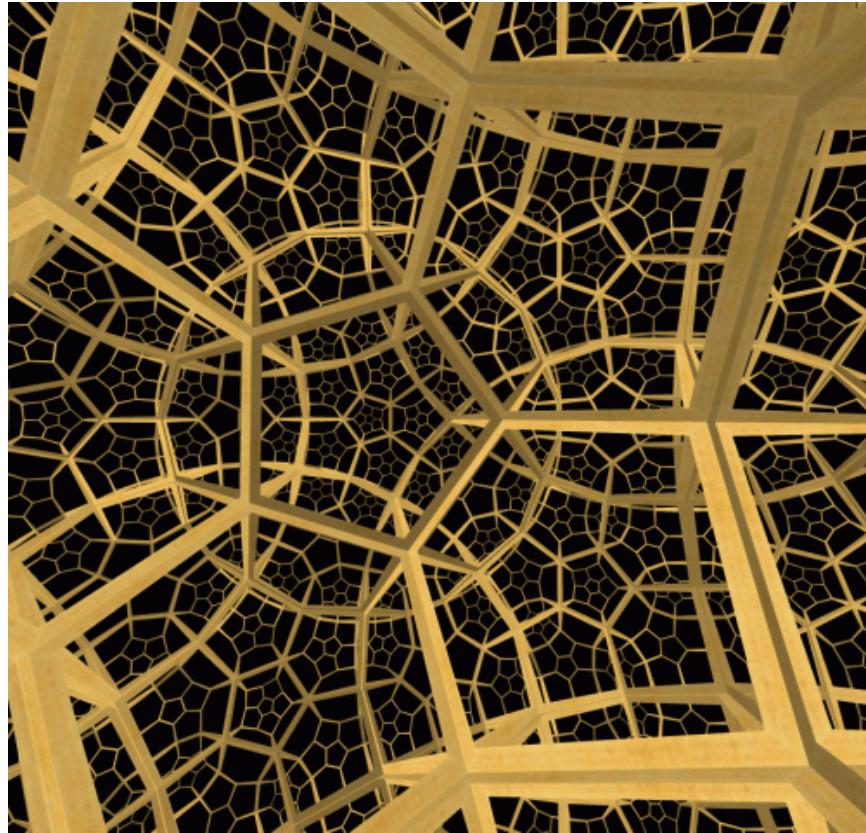
{5, 3, 4}



J. Weeks “Curved Space”を用いて作成
<http://www.geometrygames.org/CurvedSpaces/index.html.en>

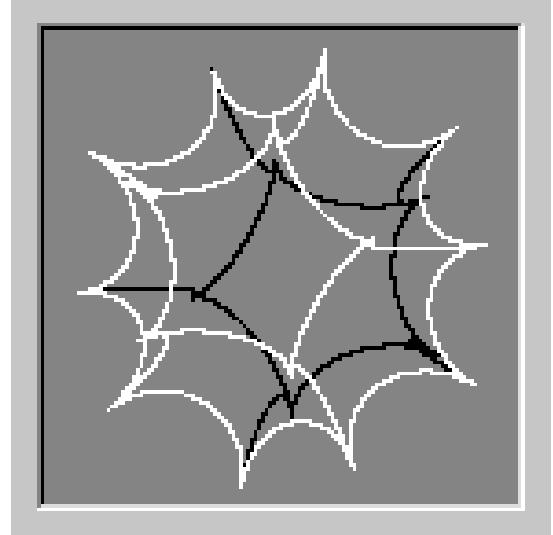
J. Weeks “Curved Space” Hyperbolic Seifert Weber

3次元双曲幾何構造



J. Weeks "Curved Space"を用いて作成
<http://www.geometrygames.org/CurvedSpaces/index.html.en>

3次元双曲空間をモデルにもつ



http://web1.kcn.jp/hp28ah77/jp26_thre.htm (ref. 2017/5/10)

3次元双曲正12面体

対面を $3/10$ 回転によって
はり合わせたのが
ザイフェルト・ウェーバー空間

3次元双曲幾何構造をもつ空間はきわめて多彩！

3次元空間の幾何化定理

3次元多様体は、いくつかのピースに分割して、それぞれが8通りの幾何構造のいずれかをモデルとしてもつようになる。

1980年代 サーストンの幾何化予想

2005年頃 ペレルマンによる解決

幾何化定理を用いてポアンカレ予想が解決

ポアンカレ予想

コンパクトで单連結な3次元多様体は
3次元球面と同相

单連結とは、すべてのループが連続的に変形して一点に縮むことである。

膨張する宇宙

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

ハッブル定数

$$H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$$

AINSHUTAIN 方程式から $a(t)$ についての次の微分方程式が導かれる。

$$\left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho$$

ρ 宇宙の物質密度

宇宙空間の幾何構造

宇宙空間が等質的かつ等方的であるとすると、3次元ユークリッド空間、3次元球面、3次元双曲空間のいずれかの幾何構造をもつ。

上の3つの幾何構造に対応するインシュタイン方程式の解が存在する（ロバートソン・ウォーカー計量）

ρ 宇宙の物質密度 H ハッブル定数

$$\rho > \frac{3}{8\pi G} H^2$$

3次元球面幾何

体積有限

$$\rho = \frac{3}{8\pi G} H^2$$

3次元ユークリッド幾何

体積は有限にも無限にもなりうる

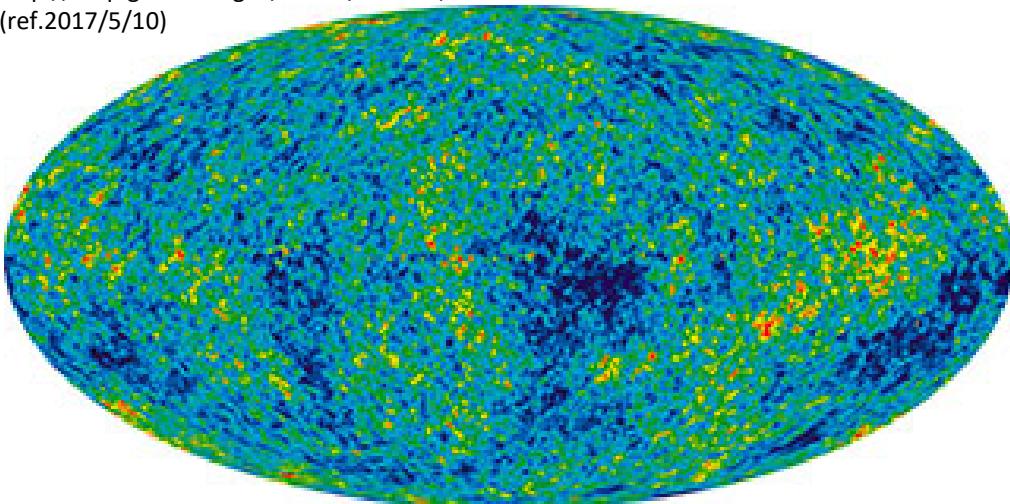
$$\rho < \frac{3}{8\pi G} H^2$$

3次元双曲幾何

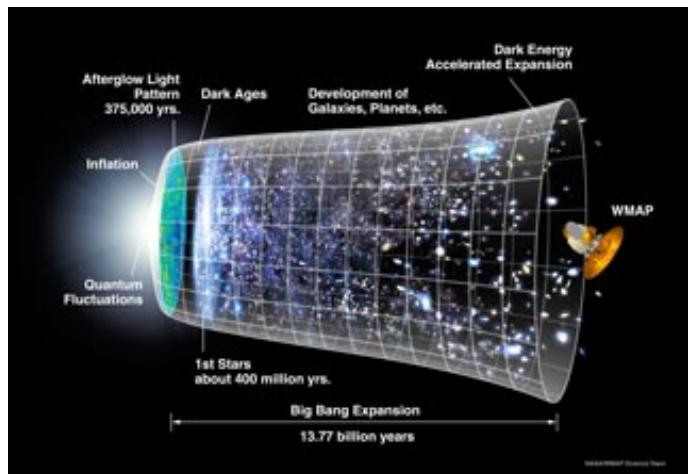
体積は有限にも無限にもなりうる

WMAPによる観測

NASA / WMAP Science Team
<http://map.gsfc.nasa.gov/media/121238/>
(ref.2017/5/10)



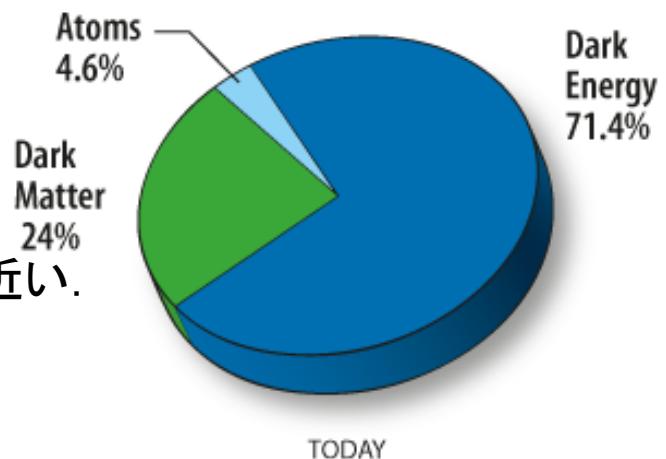
NASA / WMAP Science Team
<http://map.gsfc.nasa.gov/media/060915/index.html> (ref.2017/5/10)



WMAPによるビッグバンの残り火
「マイクロ波宇宙背景放射」の観測により
宇宙のさまざまなパラーメータが推定されている。

宇宙空間の曲率は 0.02 ± 0.02 というレベルで 0 に近い。

フラットで有限な空間は10通りある。
双曲幾何構造、球面幾何構造の可能性も
否定されているわけではない。
今後の重力波の観測などが重要な手がかりになる
と期待される。



NASA / WMAP Science Team
http://map.gsfc.nasa.gov/universe/uni_matter.html
(ref.2017/5/10)

まとめ

- 空間の曲率は内在的に決まり、空間の中から観測可能である。
- 3次元の広がりをもつ空間の幾何構造のモデルは数学的には、完全に分類されている。
- モデルが決まっても、3次元空間の可能性は有限なもの、無限なものを含めて多様に存在する。
- 空間の幾何構造を特定するには、観測データが必要であり、天文学者、物理学者と数学者の協力が不可欠である。

参考文献

小林昭七 「ユークリッド幾何学から現代幾何学へ」 日本評論社

小林昭七 「曲線と曲面の微分幾何学」 裳華房

P.M.H. ウイルソン 小島・石川訳 「曲空間の幾何学」 朝倉書店

河野俊丈 「結晶群」 共立出版

河野俊丈 「曲面の幾何構造とモジュライ」 日本評論社

木原太郎 「幾何学と宇宙」 東京大学出版会

須藤靖 「一般相対論入門」 日本評論社

太田浩一他編 「アインシュタインレクチャーズ@駒場」 東京大学出版会