

クレジット:

UTokyo Online Education 学術俯瞰講義 2016 河野俊文

ライセンス:

利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限ってページ単位で利用することができます。特に記載のない限り、本講義資料はページ単位でクリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下に提供されています。

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。



# 4次元多面体から空間のかたちをみる — 空間が曲がっているとはどういうことか

河野 俊丈

2016年7月7日

学術俯瞰講義「図形から広がる数理科学」

# 今回の講義のテーマ

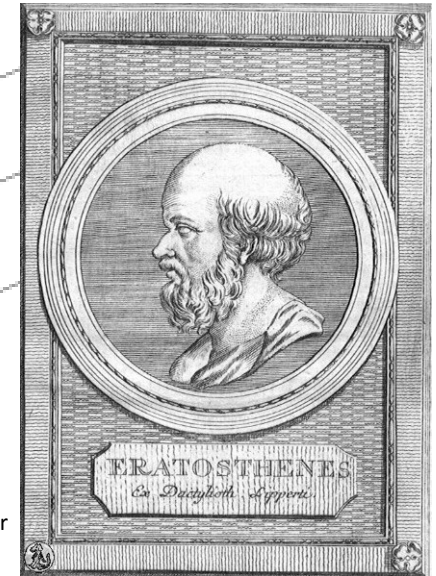
- (1) 地図の上で実際の曲線の長さをどう測るか？
  - 計量とは何か
- (2) 曲面の曲がり具合をどう表すか？
  - ガウス曲率
- (3) 2次元の幾何構造のモデル
  - 非ユークリッド幾何学の発見
- (4) 空間内から曲率を測れるか？
  - 内在的微分幾何学への流れ
- (5) 3次元球面の幾何と4次元正多胞体

# エラトステネスによる地球の大きさの測定



By Erzbischof From Wikimedia Commons.  
<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Eratosthenes.svg>  
(ref. 20160720) CC BY-SA 3.0

<http://www.phil-fak.uni-duesseldorf.de/philo/galerie/antike/eratosth.html>



Eratosthenes, BC275-BC194

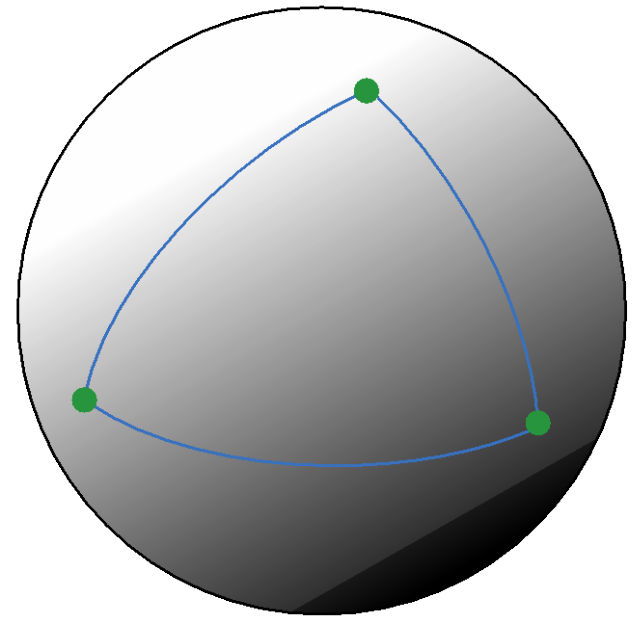
アレクサンドリアとその南にあるシエネでの南中時の太陽の高度差から地球の大きさを求めた。

地球の外からの視点を使わないで地球が球形であることをどのように認識できるか？



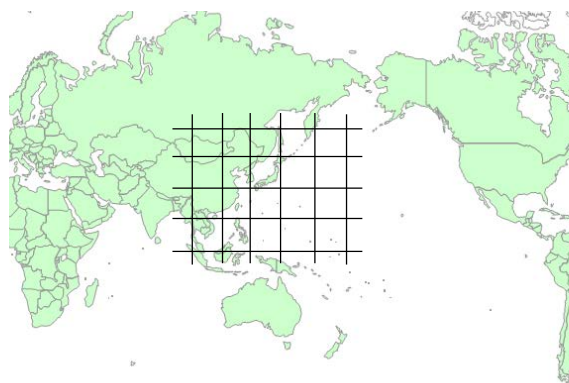
飛行機の航路は球の大円（測地線）

大円で囲まれた三角形（測地三角形）の内角の和は180度よりも大きい。



地球上で距離を測るためには、地図に表したときの縮尺（それぞれの点で縦方向、横方向の縮小率と両者の角度の3つの情報が必要）これを「計量」とよぶ。

# 計量とは各点で内積を与えること



## 内積の基本性質

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$  について線型

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$$

$$\langle \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \geq 0, \text{ 等号は } \mathbf{a} = 0$$

地図に座標を導入する.

座標についての基本ベクトルの内積を  
実際の長さを表すように定める.

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = g_{ij}, \quad i, j = 1, 2$$

$$g_{11}, g_{22}, g_{12}$$

を地図上の関数とみなす.

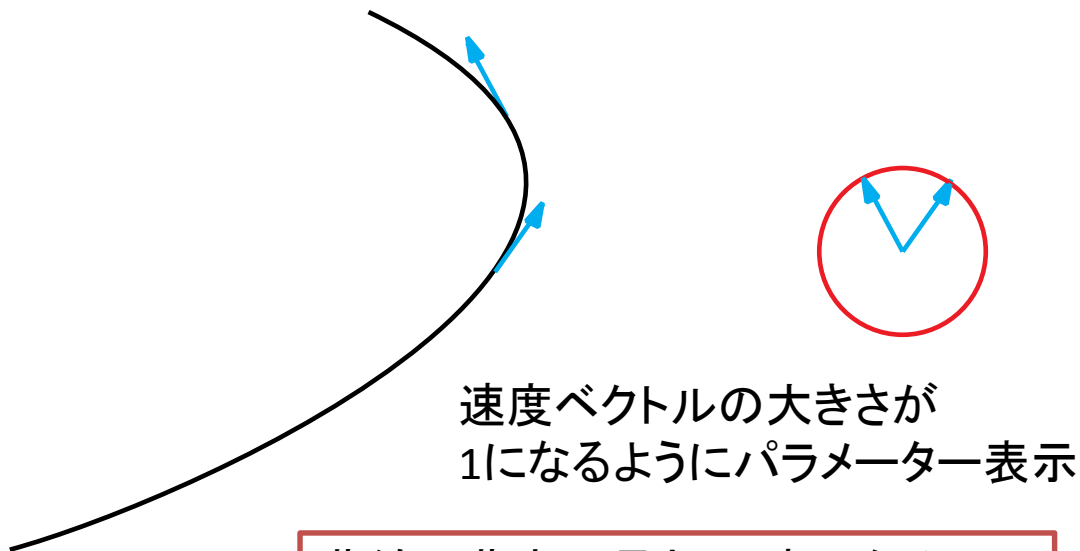
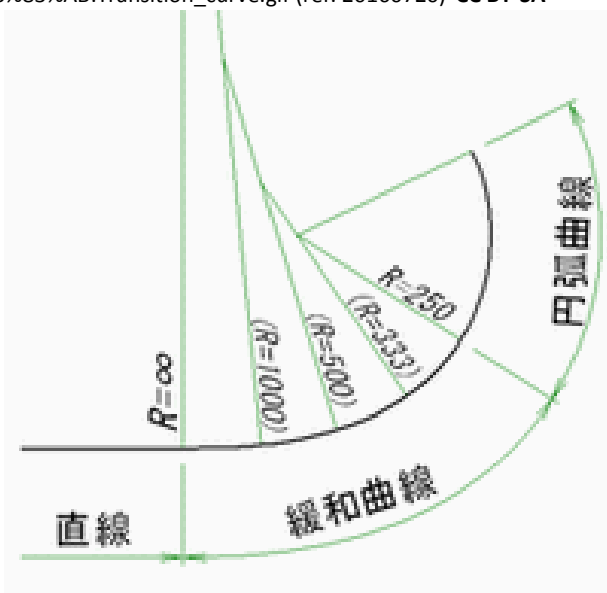
# 曲線の曲率とは？

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

速度ベクトル

$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$$

By Ikaxer From Wikimedia  
Commons [https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%95%E3%82%A1%E3%82%A4%E3%83%AB:Transition\\_curve.gif](https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%95%E3%82%A1%E3%82%A4%E3%83%AB:Transition_curve.gif) (ref. 20160720) CC BY-SA



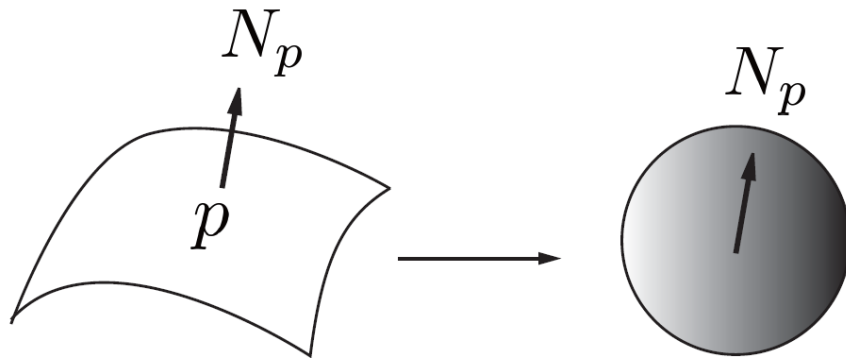
速度ベクトルの大きさが  
1になるようにパラメータ表示

曲線の曲率は長さ1の青い矢印の  
始点の移動距離と右の円上の終点  
の移動距離の比

線路の曲がり具合は曲率半径R  
で表される

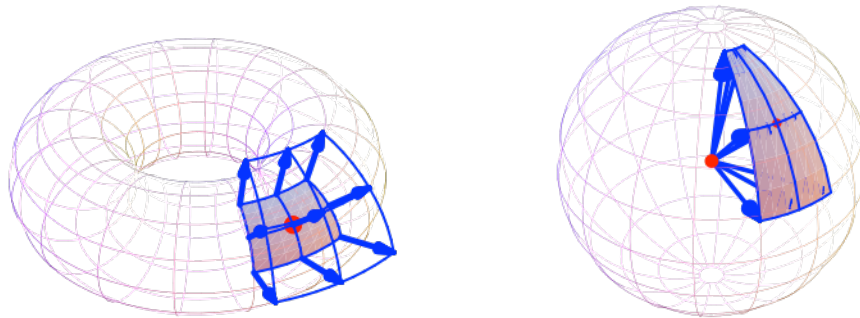
半径Rの円の曲率Kは逆数  $1/R$

# 曲面のガウス曲率

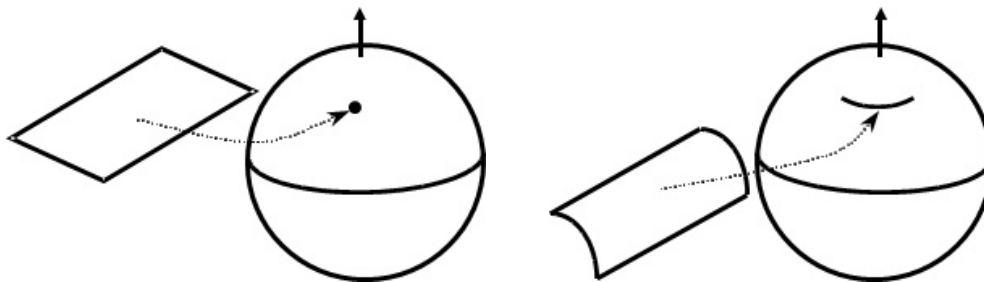


## ガウス写像

曲面に垂直で長さ1のベクトルによって球面への写像を構成.



ガウス写像によってうつされる部分の面積比がガウス曲率.  
向きが逆になるときは負号をつける.



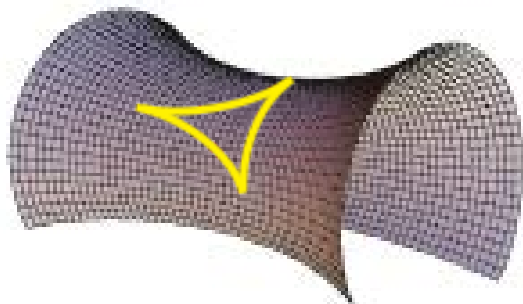
平面の曲率は0

平面をまるめても  
曲率は0



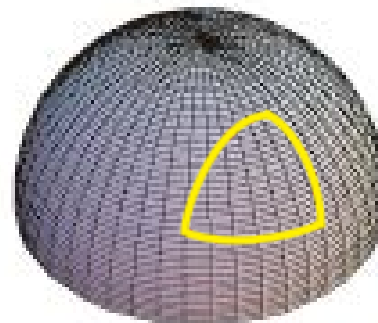
# ガウス曲率と3角形の内角の和

3角形の内角の和  $< 180$ 度

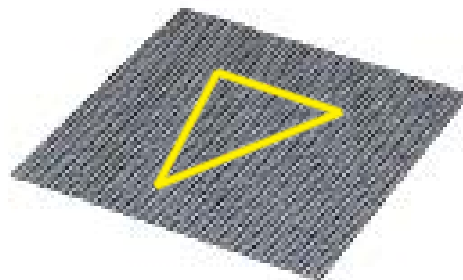


$$K < 0$$

3角形の内角の和  $> 180$ 度



$$K > 0$$



$$K = 0$$

3角形の内角の和 = 180度

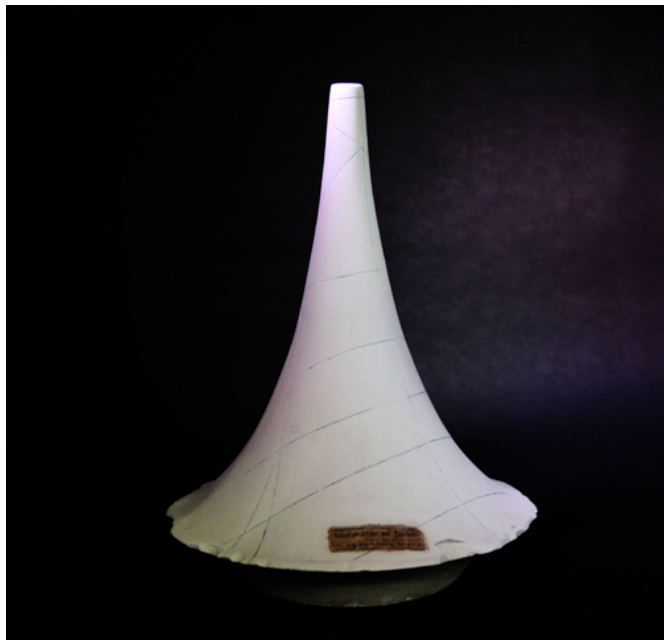




<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kohno/models/history.html> (ref. 2017/5/2)

ガウス曲率が負の  
一定値をとる曲面  
の模型  
(東大数理所蔵)

制作:ヤマダ精機



<http://faculty.ms.u-tokyo.ac.jp/~topology/models/Ncurved.html>  
(ref. 2017/5/2)

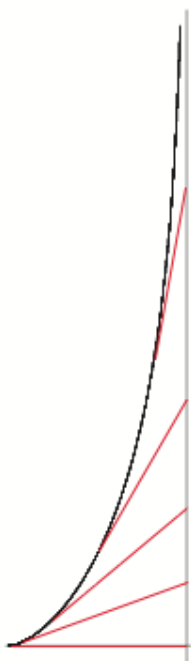
## 擬球 – 負の定曲率曲面

$$x = \frac{\cos u}{\cosh v}$$

$$y = \frac{\sin u}{\cosh v}$$

$$z = v - \tanh v$$

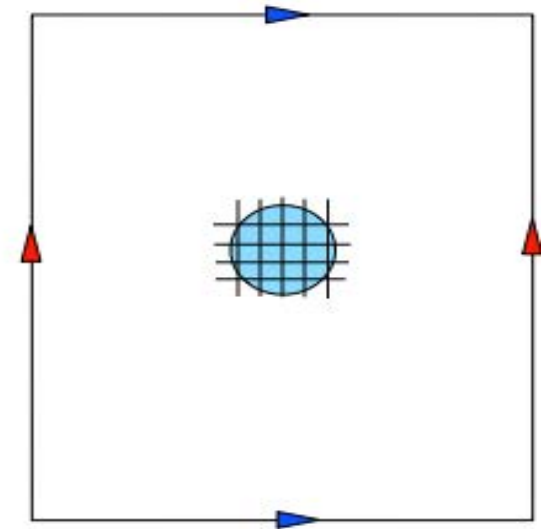
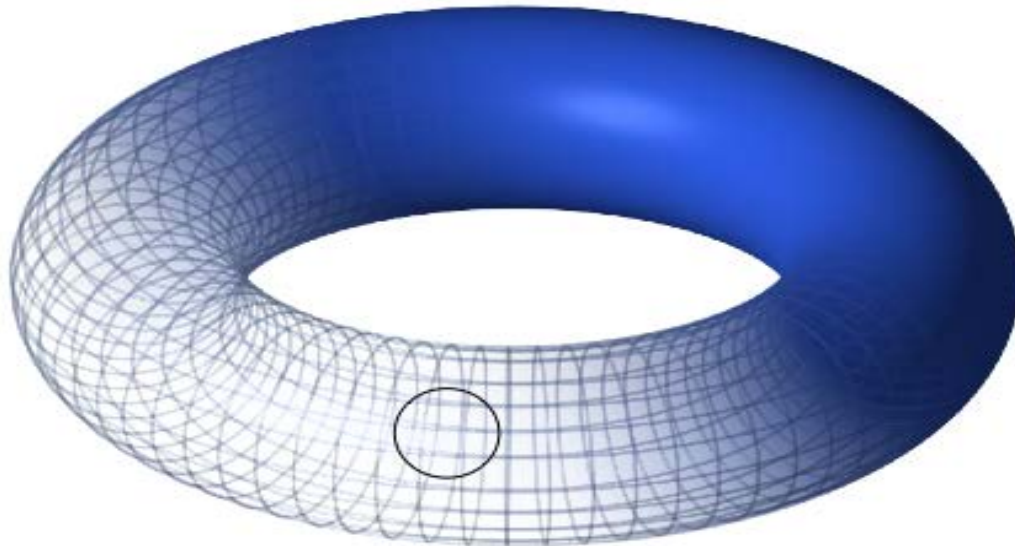
$$(0 \leq u < 2\pi, \quad 0 \leq v < \infty)$$



## トラクトリクスの回転面

# 幾何構造へのアプローチ

まずドーナツ面の幾何構造を考えよう

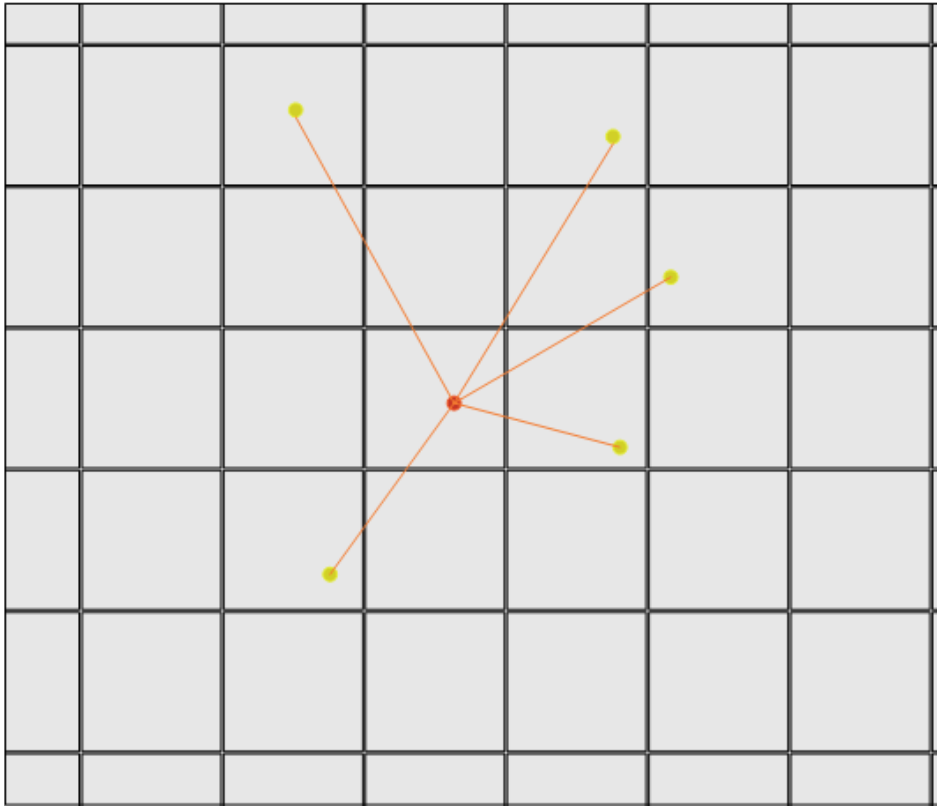


トーラスは右のような展開図によって距離をさだめるとどの点のまわりも平面の円の内部と合同になる.

トーラスの局所ユークリッド幾何構造

トーラスはフラットな構造をもつ

# トーラスの幾何構造のモデル

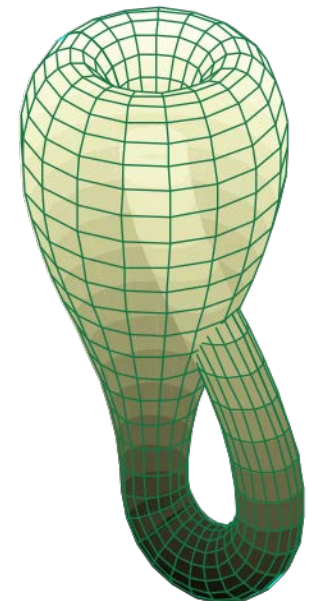
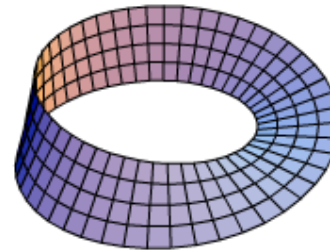
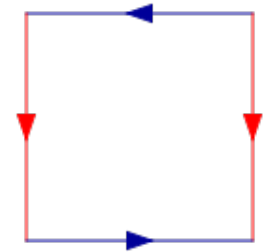
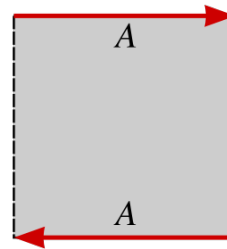


ユークリッド平面はトーラスの幾何構造のモデルである。  
トーラスからモデルとなる平面を再現するには、トーラスの  
一点について、そこに到達する「光源」すべてを観測すれば  
よい。

# 局所ユークリッド曲面

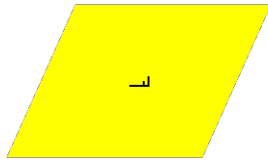
局所的にユークリッド平面と合同な完備な曲面は次の5通りに分類される。

- 1 ユークリッド平面
- 2 シリンダー
- 3 トーラス
- 4 開いたメビウスの帯
- 5 クラインのつぼ



完備とは直線がどこまでものばせること(端がない)  
トーラスとクラインのつぼはコンパクト(有限な広がり)

# 平面結晶群との関係

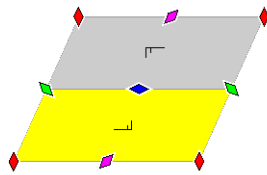


p1

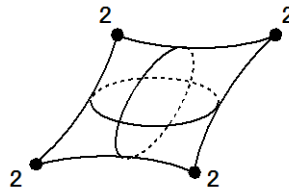


T

トーラス

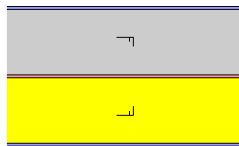


p2

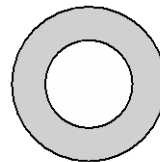


S2222

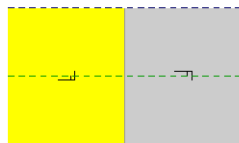
4つの特異点をもつ  
オービフォールド



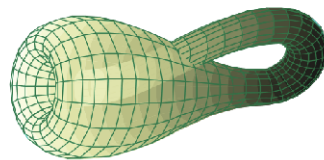
pm



A



pg



K

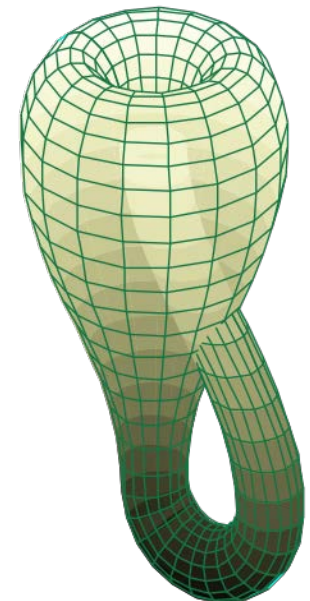
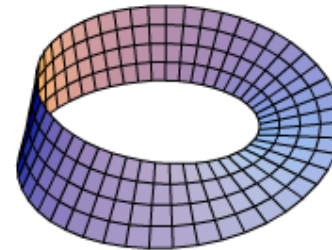
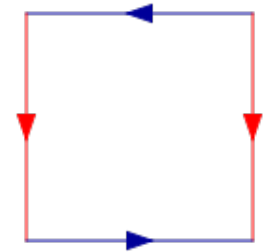
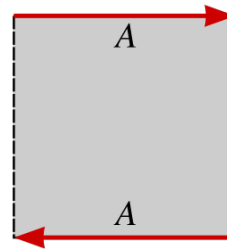
クラインのつぼ

河野 俊丈『結晶群』共立出版2015年 p. 131

# 局所ユークリッド曲面

局所的にユークリッド平面と合同な完備な曲面は次の5通りに分類される。

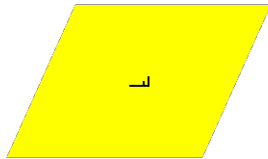
- 1 ユークリッド平面
- 2 シリンダー
- 3 トーラス
- 4 開いたメビウスの帯
- 5 クラインのつぼ



完備とは直線がどこまでものばせること(端がない)  
トーラスとクラインのつぼはコンパクト(有限な広がり)



# 平面結晶群との関係

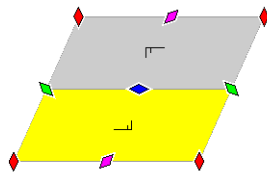


p1

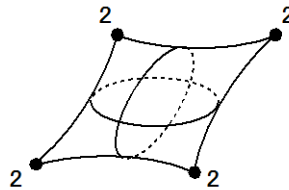


T

トーラス

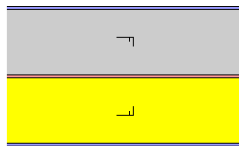


p2

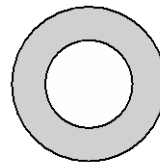


S2222

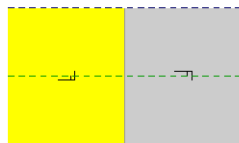
4つの特異点をもつ  
オービフォールド



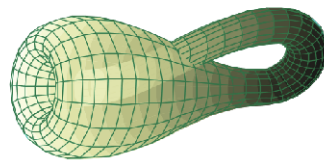
pm



A



pg



K

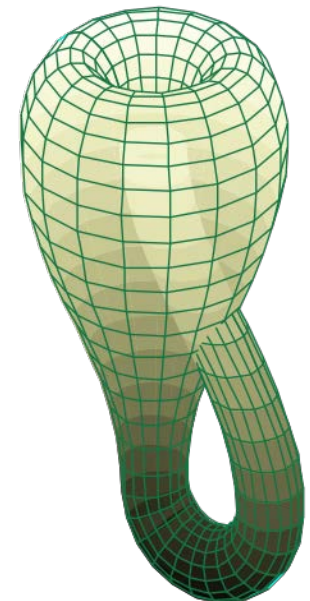
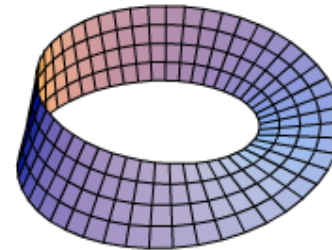
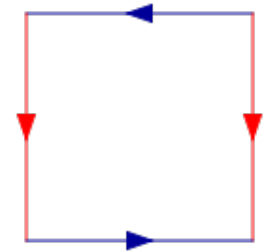
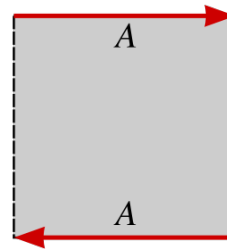
クラインのつぼ

河野 俊丈『結晶群』共立出版2015年 p. 131

# 局所ユークリッド曲面

局所的にユークリッド平面と合同な完備な曲面は次の5通りに分類される。

- 1 ユークリッド平面
- 2 シリンダー
- 3 トーラス
- 4 開いたメビウスの帯
- 5 クラインのつぼ



完備とは直線がどこまでものばせること(端がない)  
トーラスとクラインのつぼはコンパクト(有限な広がり)



河野 俊丈『結晶群』共立出版2015年 p. 80

## クラインのつぼの模型

# ユークリッド「原論」における公準

紀元前3, 4世紀

- 2点を結ぶ直線がただ一つ存在する.
- 直線は両側にいくらでものばせる.

.....

## 平行線についての第5公準

1つの線分が2つの直線に交わり, 同じ側の内角の和が2直角より小さいならば, この2つの直線は延長すると, 2直角より小さい角のある側において交わる.

2直線が平行とは, それらを延長しても交わらないこと.

# 非ユークリッド幾何学の発見

1830年頃, ロバチェフスキーとボヤイによって, 「平行線についての第5公準」は満たさないが, ユークリッド原論の他の公準は満たす幾何学の体系が存在することが示された.

<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Boylai.html> (ref. 2017/05/2)



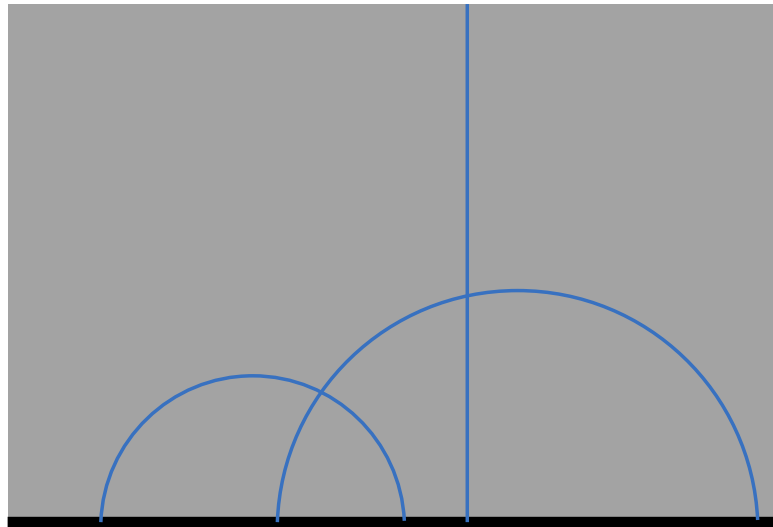
J. Boyai



N. Lobachevsky

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Lobachevsky.html>

# 非ユークリッド幾何学のモデル

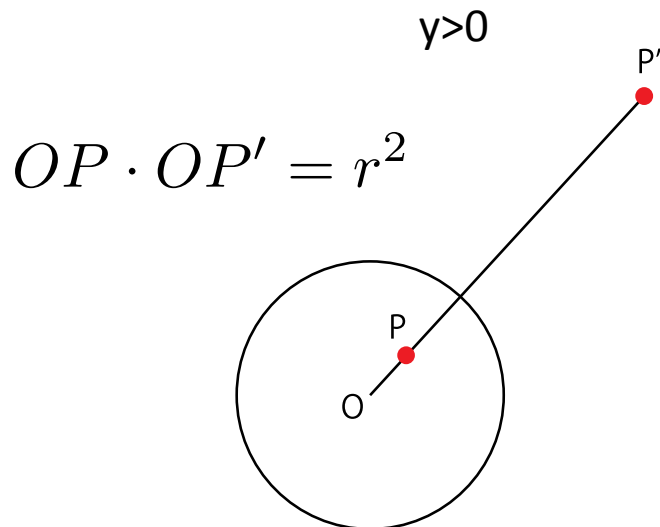


ベルトラミ, ポアンカレ,  
クライン, ...

上半平面モデル

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}$$

$$g_{12} = 0$$



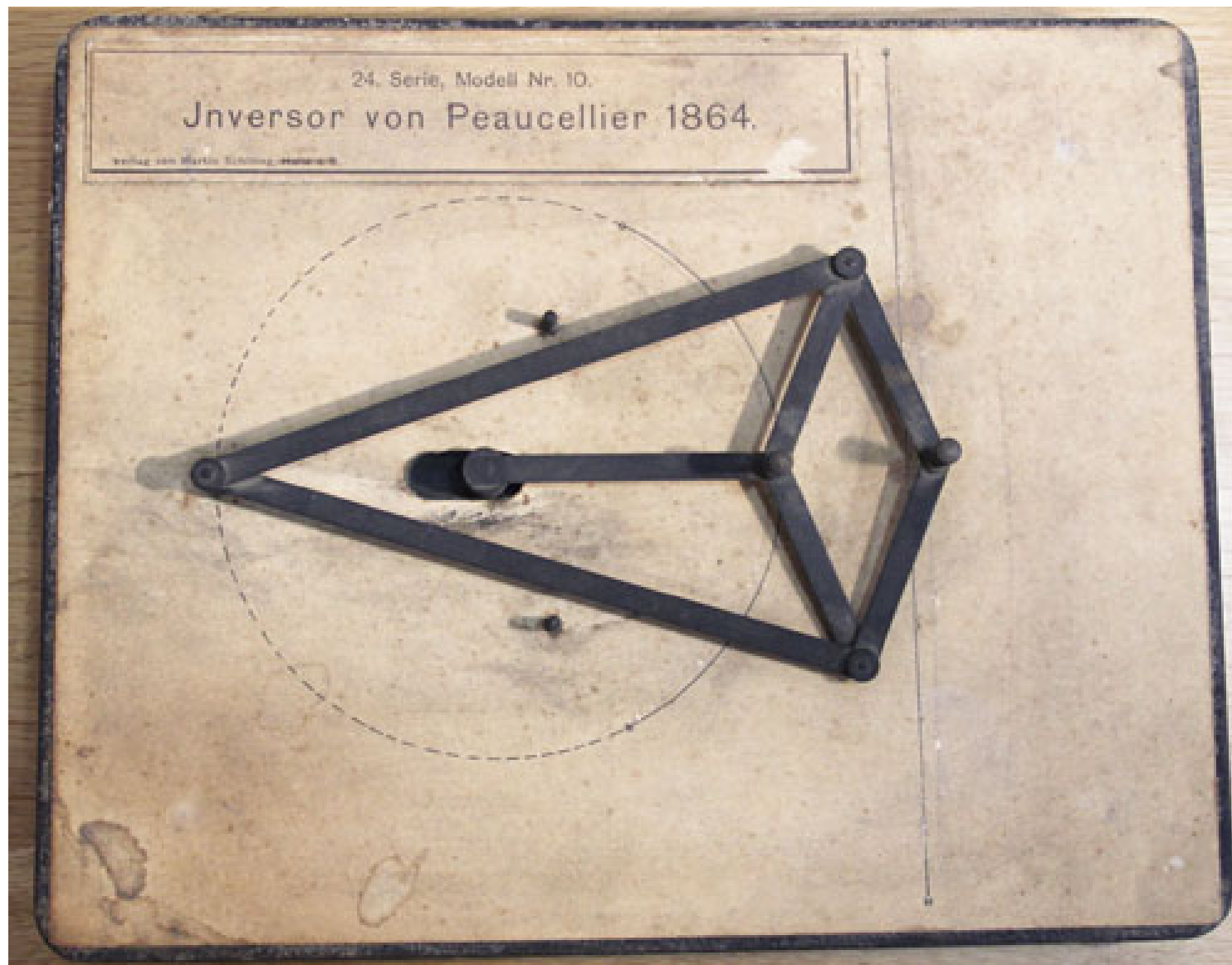
測地線は x軸と直交する半円または  
半直線

測地線に関する反転によって距離  
は変わらない.

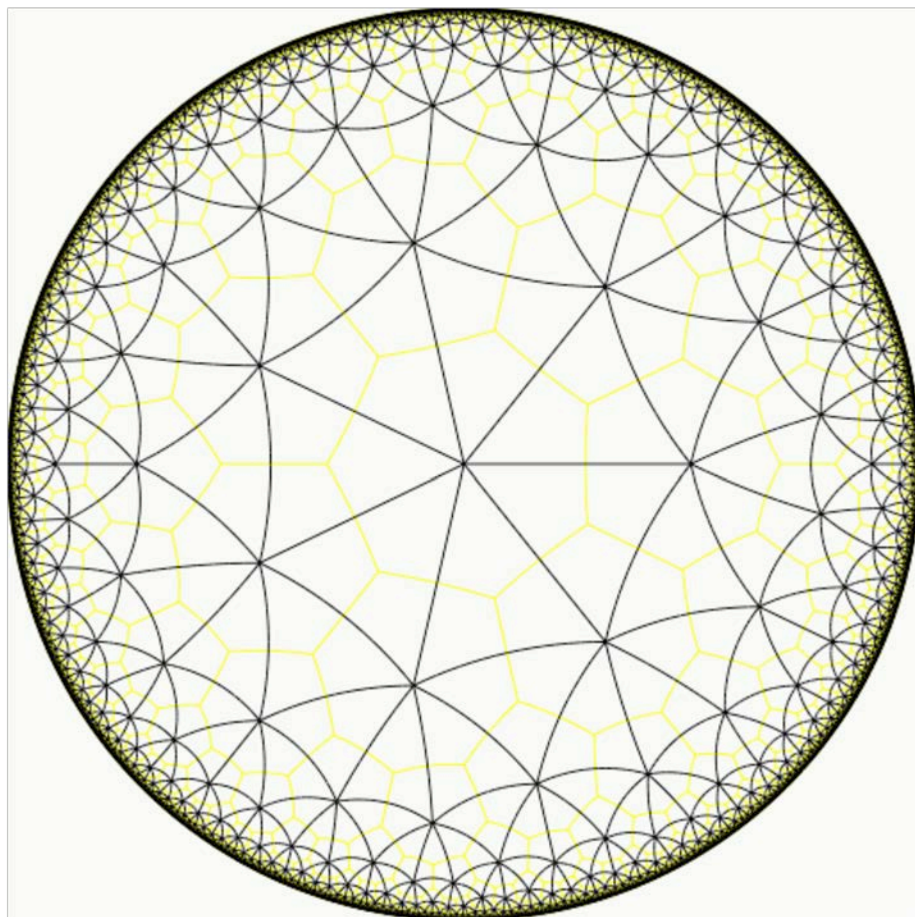
半径  $r$  の円についての反転

# ポスリエの反転機

<http://faculty.ms.u-tokyo.ac.jp/~topology/models/invertors.pdf> (ref. 2017/5/2)



# 双曲幾何のモデル ポアンカレ円板 (双曲平面)



測地線は無限遠の円周と  
直交する円弧

三角形の内角の和は  
180度より小さい

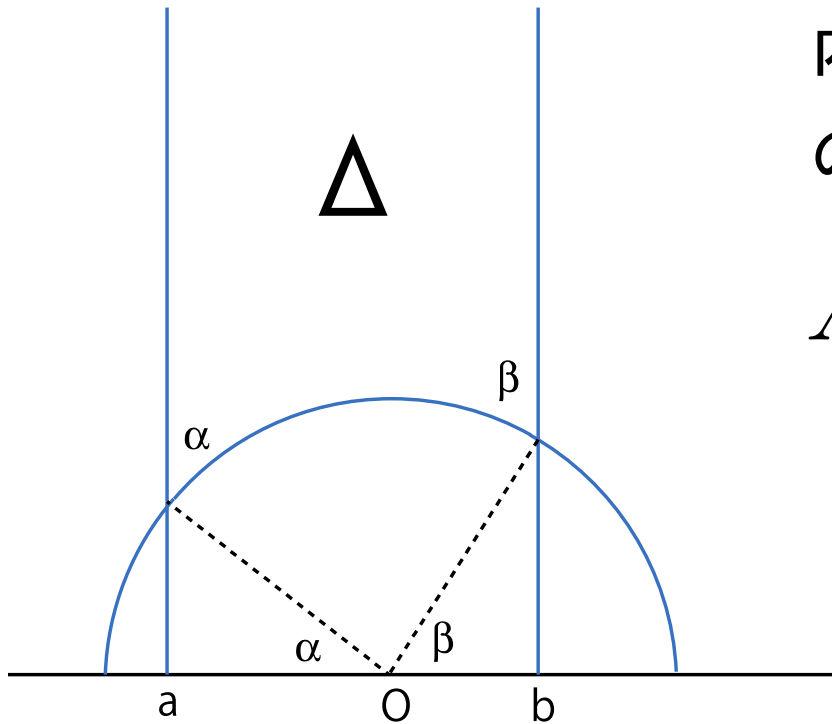
$$g_{11} = g_{22} = \frac{4}{(1 - r^2)^2}$$

$$g_{12} = 0$$

単位円の内部に縮尺  $\frac{2}{1 - r^2}$  で距離を入れる。



# 測地3角形の面積



内角  $\alpha, \beta, \gamma$   
の測地3角形の面積

$$A = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

領域  $\Delta$  の面積

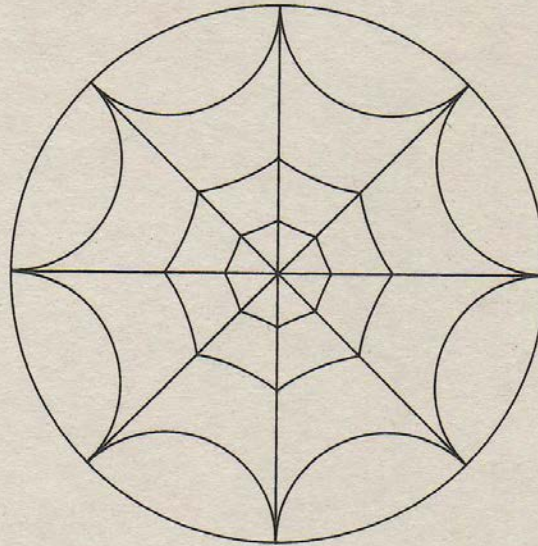
$$\int_a^b \left( \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} \right) dx = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi - (\alpha + \beta)$$



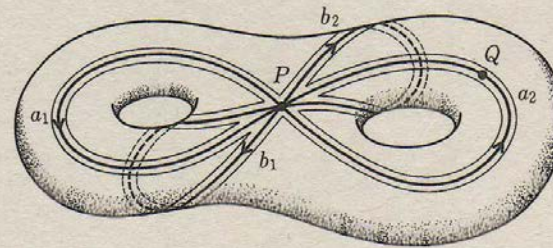
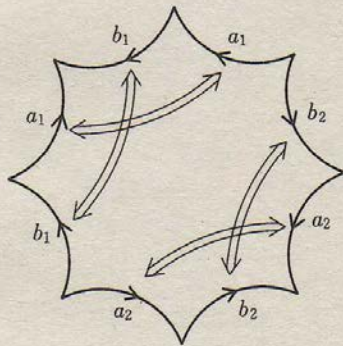
## 種数2の曲面

# 種数2の曲面の双曲幾何構造

ポアンカレ円板



内角が45度の  
正8角形の辺を  
はり合わせる。



河野俊文『曲面の幾何構造とモジュライ』日本評論社1997年  
p. 48 図12 (1)(2)

# 2次元幾何構造のモデル

## 球面

三角形の内角の和  
は180度より大

曲率 正

## ユークリッド平面

三角形の内角の和  
は180度

曲率 0

## 双曲平面

三角形の内角の和  
は180度より小

曲率 負

トーラス

種数2以上の曲面

## タイプ $\{p, q\}$ のタイルばり

ユークリッド平面

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$$

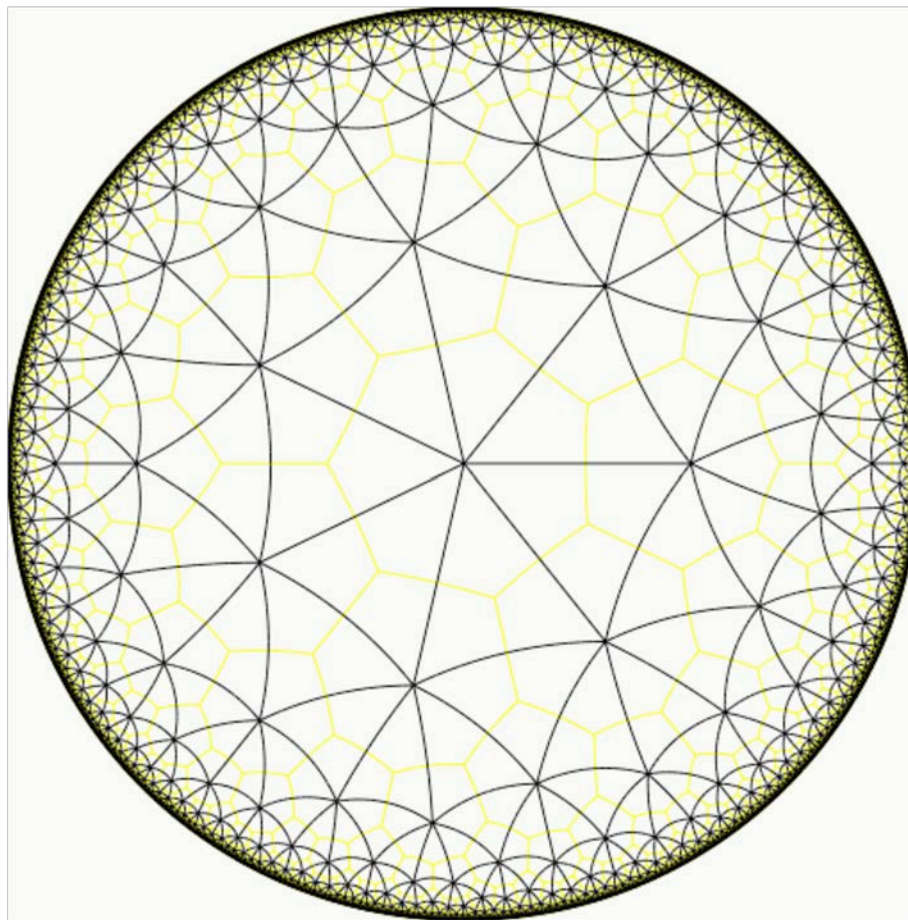
球面

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$$

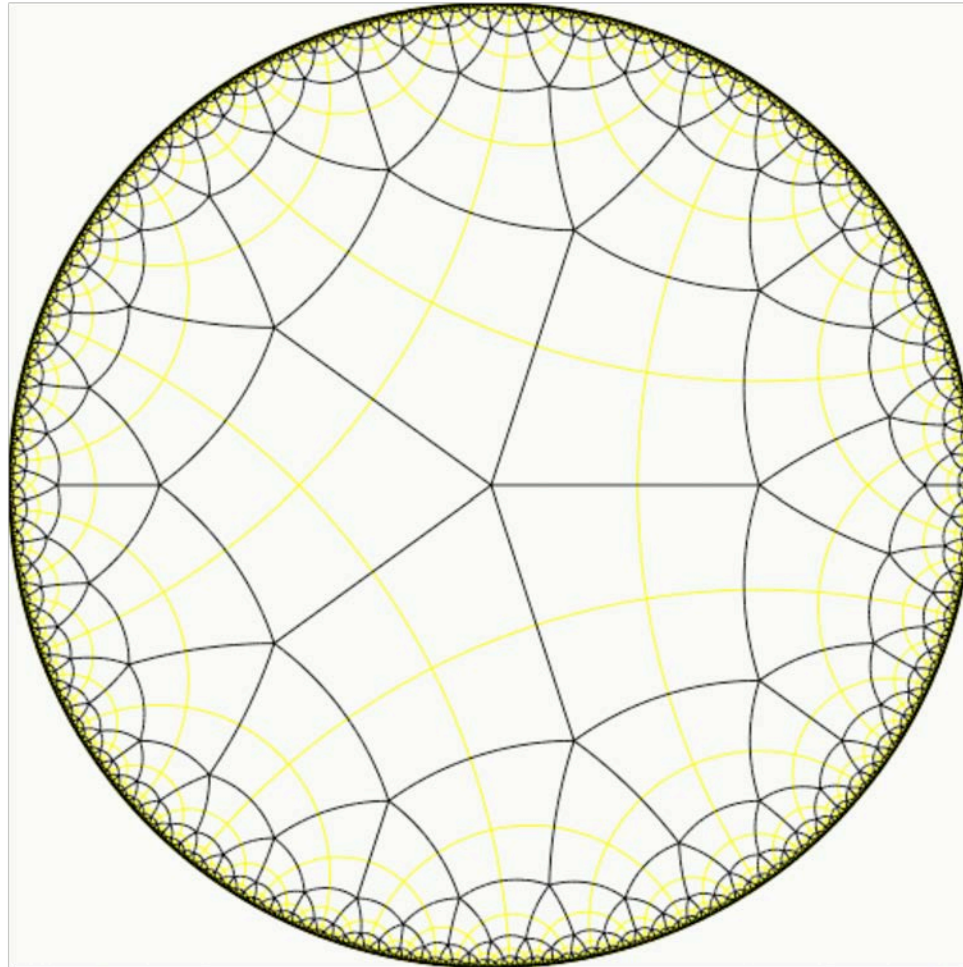
双曲平面

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$$

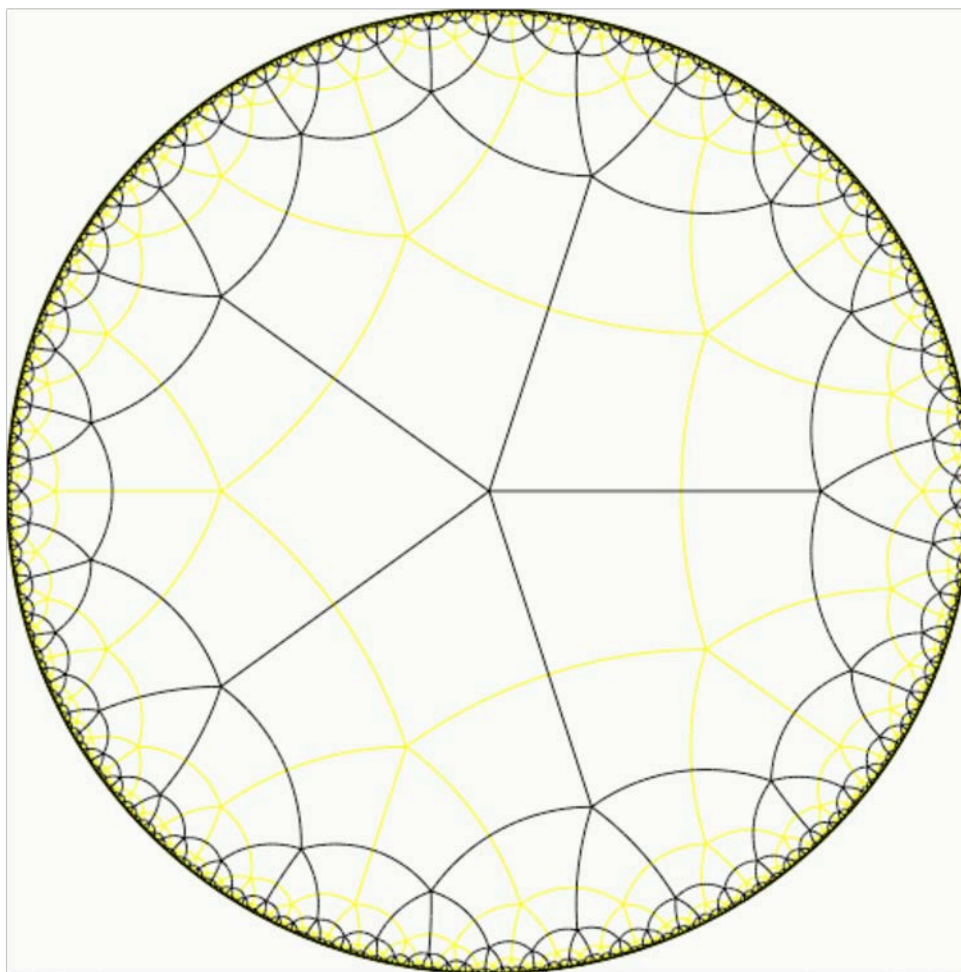
# 双曲平面のタイルばり{3,7}型



# 双曲平面のタイルばり{4,5}型

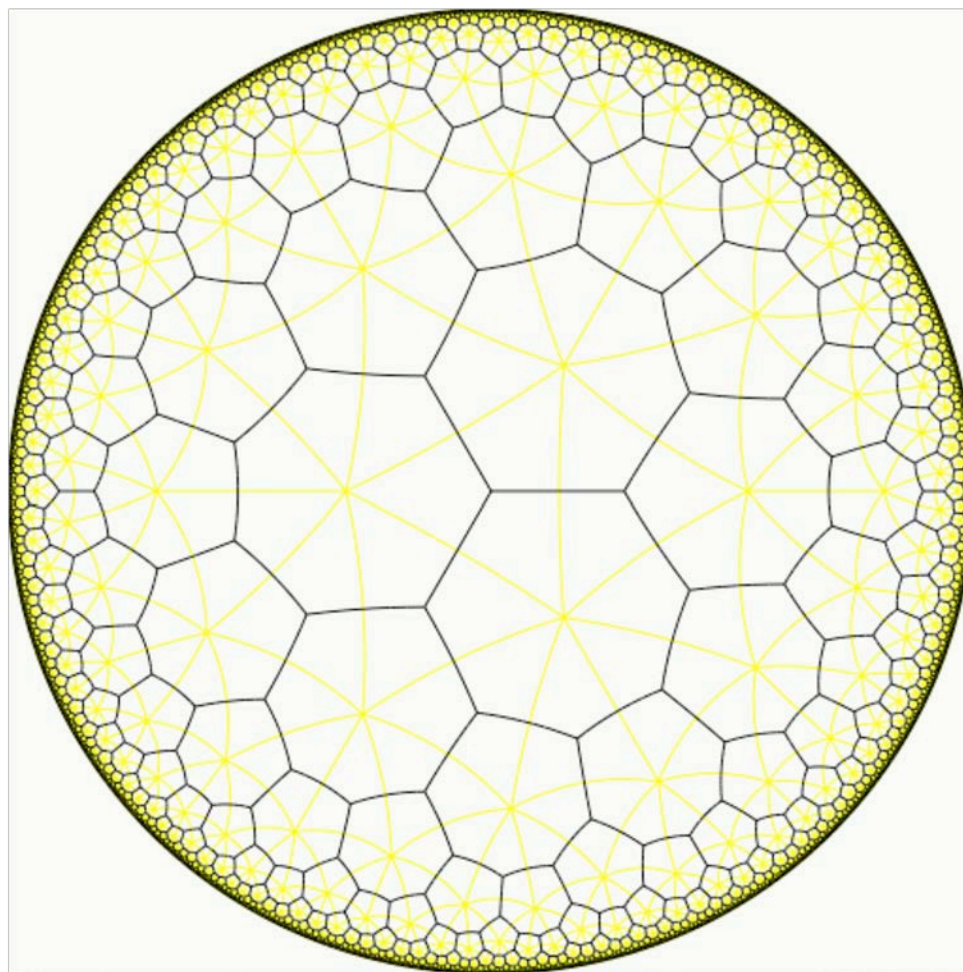


# 双曲平面のタイルばり{5, 5}型

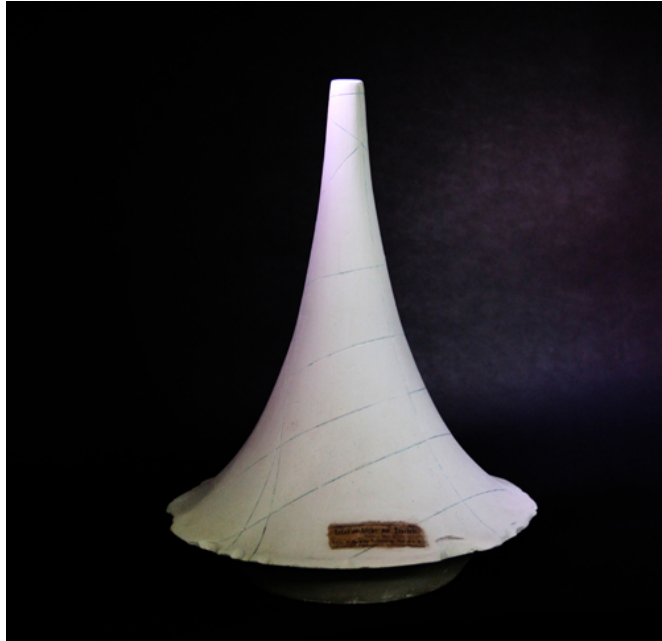




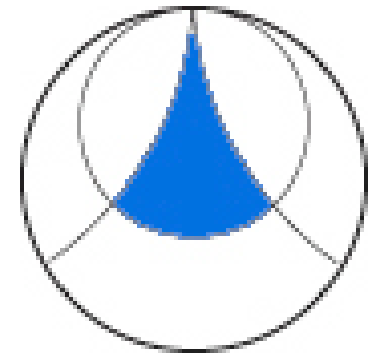
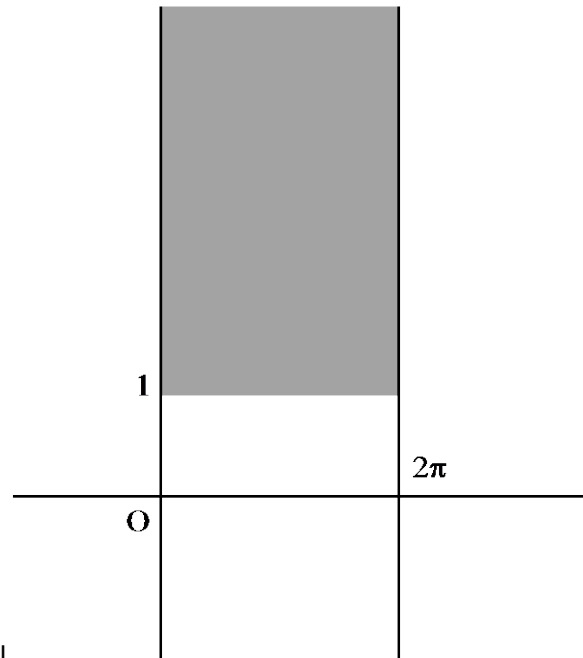
# 双曲平面のタイルばり{7, 3}型



# 擬球と双曲平面



<http://faculty.ms.u-tokyo.ac.jp/~topology/models/Ncurved.html>  
(ref. 2017/5/2)



擬球の展開図を双曲平面上  
に表すことができる。

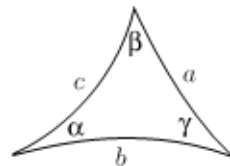
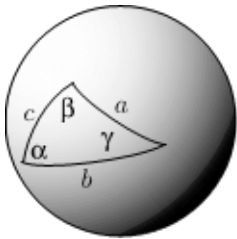
# ガウスの定理 Theorema Egregium

曲面のガウス曲率は，計量によって定まる．

曲率は曲面が入っている空間からみなくても，内在的にさだまる．

ガウス曲率  $K$  の測地三角形での平均は，  
三角形の内角を  $\alpha, \beta, \gamma$  として

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi$$



等距離地図の不可能性  
地球のどんな小さい部分も縮尺一定  
の正確な地図はつくれない！

球面の曲率は正， 平面の曲率は0

# 内在的な微分幾何学の確立

計量から出発して、空間の曲がり具合を表す曲率の概念がリーマンによって定式化された。

局所的に  $n$  個の座標で定義できる図形が  $n$  次元多様体



<http://www.sil.si.edu/DigitalCollections/hst/scientific-identity/fullsize/SIL14-R003-02a.jpg>

Riemann 1826-1866

$g_{\mu\nu}$

計量

リーマン多様体



測地線



さまざまな方向の測地3角形の内角を見る

リーマンの曲率テンソル

# 3次元球面の幾何学と正多胞体

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$$

正多胞体は3次元球面の正則分割を与える.

	シュレフ リー記号	0-セル	1-セル	2-セル	3-セル
正5胞体	{3, 3, 3}	5	10	10	5
正8胞体	{4, 3, 3}	16	32	24	8
正16胞体	{3, 3, 4}	8	24	32	16
正24胞体	{3, 4, 3}	24	96	96	24
正120胞体	{5, 3, 3}	600	1200	720	120
正600胞体	{3, 3, 5}	120	720	1200	600

3次元球面のオイラー数は0

# グラム行列

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2) \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

グラム行列

$$A^t A = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle & \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \\ \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle & \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \end{pmatrix}$$

$$\det A^t A = (\det A)^2 > 0$$

ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  が一次独立ならば, グラム行列の行列式は正

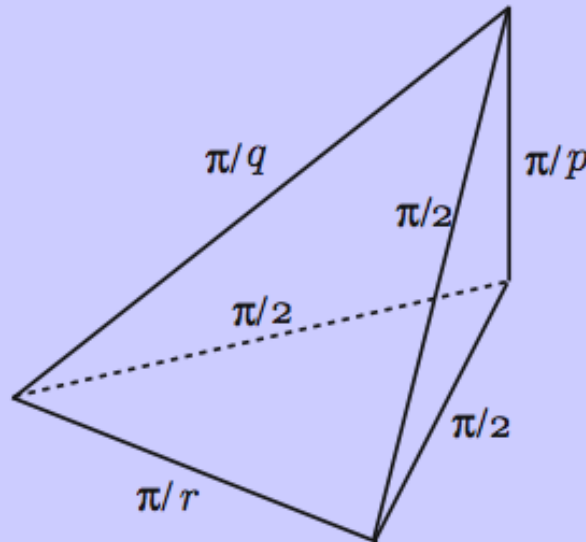
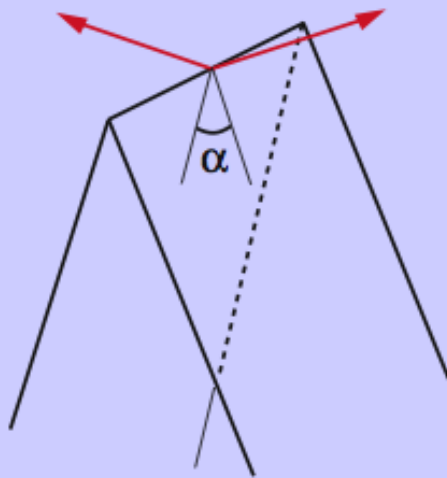
## 球面直交単体のグラム行列

### グラム行列

$$a_{ij} = \cos(\pi - \alpha_{ij}) = -\cos \alpha_{ij}$$

$\alpha_{ij}$  は  $i, j$  面のなす面角

グラム行列  $A$  : 4次元ユークリッド空間の内積



# 3次元球面の正則分割を与える $\{p, q, r\}$ の条件

直交球面単体のグラム行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\cos \alpha & 0 & 0 \\ -\cos \alpha & 1 & -\cos \beta & 0 \\ 0 & -\cos \beta & 1 & -\cos \gamma \\ 0 & 0 & -\cos \gamma & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{p}, \beta = \frac{\pi}{q}, \gamma = \frac{\pi}{r}$$

の行列式が正となることから,

$$\sin \frac{\pi}{p} \sin \frac{\pi}{r} > \cos \frac{\pi}{q}$$