

# 非線形有限要素法特論

2004 年 12 月 13 日

# 非線形有限要素法特論

- 講義内容は、非線形有限要素法の解説
- 夏学期の「非線形有限要素法の基礎」を受講していることが望まれる。
- 受講していない場合は、「非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎」久田俊明著、丸善を読んで理解しておくこと。
- 講義資料は<http://www.sml.k.u-tokyo.ac.jp/members/nabe/lecture2004> からダウンロードできるようにします。講義前日までに確定しますので各自プリントアウトして持参してください。
- <http://www.sml.k.u-tokyo.ac.jp/members/nabe/lecture2003> から昨年度の講義ノートがダウンロードできます。講義名が「有限要素法特論」ですが、基本的に同じ内容です。
- 今年度（2004）から新設した演習は、翌週の講義時間に提出してください。必須ではありませんし、採点しませんが、実際に手を動かして計算することは有限要素法の理解を深める上で重要です。
- 質問などは、[nabe@sml.k.u-tokyo.ac.jp](mailto:nabe@sml.k.u-tokyo.ac.jp) まで。

# 非線形有限要素法特論講義予定

|     |       |                              |
|-----|-------|------------------------------|
| 1.  | 10/ 4 | 微分方程式の境界値問題の有限要素解析           |
| 2.  | 10/18 | 線形弾性体の有限要素解析                 |
| 3.  | 10/25 | アイソパラメトリックソリッド要素 (プログラム)     |
| 4.  | 11/ 1 | 連立一次方程式の数値解法と境界条件処理 (演習あり)   |
| 5.  | 11/ 8 | 線形有限要素法の基本的なプログラム構造 (プログラム)  |
| 6.  | 11/15 | 幾何学非線形問題の有限要素定式化 1           |
| 7.  | 11/22 | 幾何学非線形問題の有限要素定式化 2           |
| 8.  | 11/29 | 超弾性体、弾塑性体                    |
| 9.  | 12/ 6 | 休講                           |
| 10. | 12/13 | 非線形方程式の動的解析手法、固有値解析、構造要素     |
| 11. | 12/20 | 連立一次方程式の数値解法 — skyline 法、反復法 |
| 12. | 1/17  | ALE 有限要素流体解析                 |
| 13. | 1/24  | ALE 有限要素流体解析                 |

## 長方形断面の梁要素

- 一般的な偏微分方程式を素直に離散化するなら、ソリッド要素が自然
- しかし「構造解析」をする場合には、別な考え方がある
- 梁要素は代表的な構造要素
- 断面の寸法が長手方向の寸法より十分に小さいスレンダーな部材からなる構造物の解析に使用される.
- 同構造をソリッド要素でモデル化するのに対して、大幅に総自由度やモデル化の手間が軽減される.
- 低次のソリッド要素で梁をモデル化すると、ロッキングする
- 時刻 0 において、梁の中立軸に垂直な平面は変形の間も平面を保つが必ずしも変形した中立軸に垂直である必要はない
- 梁の断面は変形しない.

# 座標及び変位の補間関数 1

- 時刻  $t$  で節点  $n$  の断面を張るベクトルを  ${}^tV_2^{(n)}$ ,  ${}^tV_3^{(n)}$ , また時刻  $t$  での節点  $n$  の位置ベクトルを  ${}^t\mathbf{x}$  とする

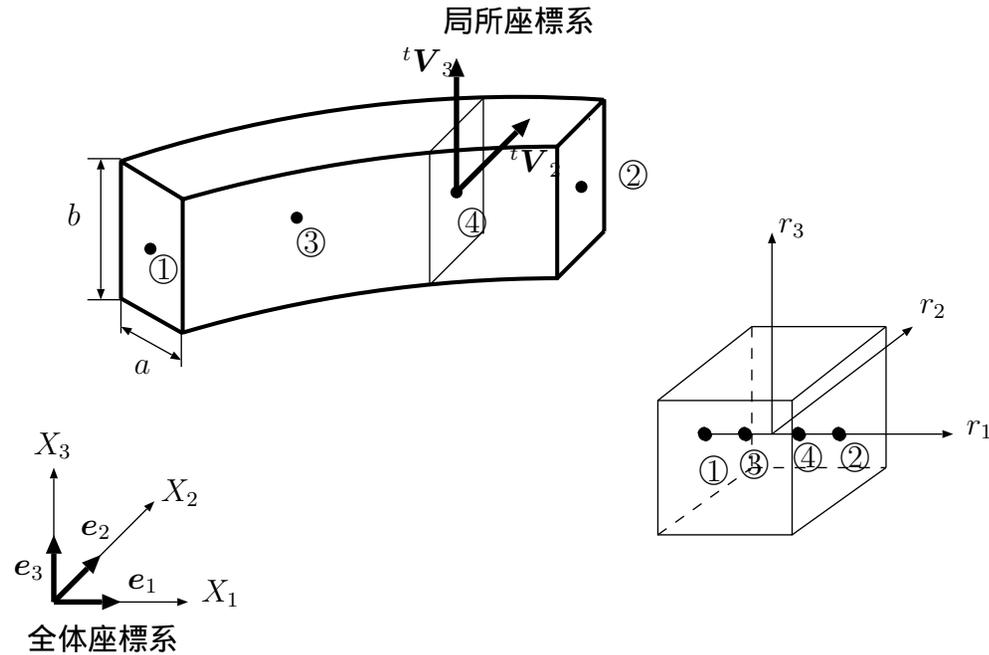


図 1: 座標系の定義

- 時刻  $t$  における要素内の任意の点における位置ベクトルは,

$${}^t\mathbf{x}(r_1, r_2, r_3) = N^{(n)}(r_1) \left( {}^t\mathbf{x}^n + \frac{a}{2}r_2 {}^tV_2^{(n)} + \frac{b}{2}r_3 {}^tV_3^{(n)} \right) \quad (1)$$

と, 表すことができる.

- なお, 形状関数  $N^{(n)}$  には 1次元要素のものを用いる.

## 座標及び変位の補間関数 2

- 局所座標ベクトル  ${}^tV_2^{(n)}$ ,  ${}^tV_3^{(n)}$  は梁の断面に固定されており, 要素の変形とともに回転することを考慮すれば, 時刻  $t$  から  $t' (= t + \Delta t)$  までの間の変位増分ベクトル  $u$  は

$$\begin{aligned} u &= {}^t'x - {}^tx \\ &= N^{(n)} \left\{ {}^t'x^{(n)} - {}^tx^{(n)} + \frac{a}{2}r_2 \left( {}^t'V_2^{(n)} - {}^tV_2^{(n)} \right) + \frac{b}{2}r_3 \left( {}^t'V_3^{(n)} - {}^tV_3^{(n)} \right) \right\} \end{aligned}$$

となる.

- ここで  $\Delta t$  間の回転増分は微小であると仮定すれば,

$${}^t'V_i^{(n)} \simeq {}^tV_i^{(n)} + \theta^{(n)} \times {}^tV_i^{(n)} \quad (2)$$

と表すことができる.

- よって,

$$\begin{aligned} {}^t'V_i^{(n)} - {}^tV_i^{(n)} &= \theta^{(n)} \times {}^tV_i^{(n)} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3^{(n)} & \theta_2^{(n)} \\ \theta_3^{(n)} & 0 & -\theta_1^{(n)} \\ -\theta_2^{(n)} & \theta_1^{(n)} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^tV_{i1}^{(n)} \\ {}^tV_{i2}^{(n)} \\ {}^tV_{i3}^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_2^{(n)} {}^tV_{i3}^{(n)} - \theta_3^{(n)} {}^tV_{i2}^{(n)} \\ \theta_3^{(n)} {}^tV_{i1}^{(n)} - \theta_1^{(n)} {}^tV_{i3}^{(n)} \\ \theta_1^{(n)} {}^tV_{i2}^{(n)} - \theta_2^{(n)} {}^tV_{i1}^{(n)} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & {}^tV_{i3}^{(n)} & -{}^tV_{i2}^{(n)} \\ -{}^tV_{i3}^{(n)} & 0 & {}^tV_{i1}^{(n)} \\ {}^tV_{i2}^{(n)} & -{}^tV_{i1}^{(n)} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1^{(n)} \\ \theta_2^{(n)} \\ \theta_3^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (3) \end{aligned}$$

## 座標及び変位の補間関数 3

- ここで  ${}^t x, u$  の全体座標系での成分表示をしておく.

$$\begin{Bmatrix} {}^t x_1 \\ {}^t x_2 \\ {}^t x_3 \end{Bmatrix} = N^{(n)}(r_1) \begin{Bmatrix} {}^t x_1^{(n)} \\ {}^t x_2^{(n)} \\ {}^t x_3^{(n)} \end{Bmatrix} + \frac{a}{2} r_2 N^{(n)}(r_1) \begin{Bmatrix} {}^t V_{21}^{(n)} \\ {}^t V_{22}^{(n)} \\ {}^t V_{23}^{(n)} \end{Bmatrix} + \frac{b}{2} r_3 N^{(n)}(r_1) \begin{Bmatrix} {}^t V_{31}^{(n)} \\ {}^t V_{32}^{(n)} \\ {}^t V_{33}^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = N^{(n)}(r_1) \begin{Bmatrix} u_1^{(n)} \\ u_2^{(n)} \\ u_3^{(n)} \end{Bmatrix} + \frac{a}{2} r_2 N^{(n)}(r_1) \begin{bmatrix} 0 & {}^t V_{23}^{(n)} & -{}^t V_{22}^{(n)} \\ -{}^t V_{23}^{(n)} & 0 & {}^t V_{21}^{(n)} \\ {}^t V_{22}^{(n)} & -{}^t V_{21}^{(n)} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1^{(n)} \\ \theta_2^{(n)} \\ \theta_3^{(n)} \end{Bmatrix} \\ + \frac{b}{2} r_3 N^{(n)}(r_1) \begin{bmatrix} 0 & {}^t V_{33}^{(n)} & -{}^t V_{32}^{(n)} \\ -{}^t V_{33}^{(n)} & 0 & {}^t V_{31}^{(n)} \\ {}^t V_{32}^{(n)} & -{}^t V_{31}^{(n)} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1^{(n)} \\ \theta_2^{(n)} \\ \theta_3^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

# ひずみの計算 1

- ひずみを求めるのに必要な量は  $\partial u_i / \partial x_j$  であるが、これに対して直接計算できる量は  $\partial u_i / \partial r_j$ ,  $\partial x_i / \partial r_j$  であるから,  $\partial u_i / \partial r_j$  を  $\partial x_i / \partial r_j$  を用いて変換する.
- 未知量  $\partial u_i / \partial x_j$  と既知量  $\partial u_i / \partial r_j$  との関係は次のように表せる.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial r_1} \\ \frac{\partial u_i}{\partial r_2} \\ \frac{\partial u_i}{\partial r_3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r_1} & \frac{\partial x_2}{\partial r_1} & \frac{\partial x_3}{\partial r_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial r_2} & \frac{\partial x_2}{\partial r_2} & \frac{\partial x_3}{\partial r_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial r_3} & \frac{\partial x_2}{\partial r_3} & \frac{\partial x_3}{\partial r_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \end{Bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (6)$$

- ここで, ヤコビマトリックス  $[J]$  を以下のように定義する.

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r_1} & \frac{\partial x_2}{\partial r_1} & \frac{\partial x_3}{\partial r_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial r_2} & \frac{\partial x_2}{\partial r_2} & \frac{\partial x_3}{\partial r_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial r_3} & \frac{\partial x_2}{\partial r_3} & \frac{\partial x_3}{\partial r_3} \end{bmatrix} \quad (7)$$

- $[J]$  の逆行列を式 (6) の両辺に左から掛けると

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^{-1} & J_{12}^{-1} & J_{13}^{-1} \\ J_{21}^{-1} & J_{22}^{-1} & J_{23}^{-1} \\ J_{31}^{-1} & J_{32}^{-1} & J_{33}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial r_1} \\ \frac{\partial u_i}{\partial r_2} \\ \frac{\partial u_i}{\partial r_3} \end{Bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (8)$$

- ここでヤコビの成分  $\partial x_i / \partial r_i$  は, 以下のように表せる.

$$\frac{\partial^t x_i}{\partial r_1} = \frac{\partial N^{(n)}(r_1)}{\partial r_1} \left\{ {}^t x_i^{(n)} + \frac{a}{2} r_2 {}^t V_{2i}^{(n)} + \frac{b}{2} r_3 {}^t V_{3i}^{(n)} \right\} \quad (9)$$

$$\frac{\partial^t x_i}{\partial r_1} = \frac{a}{2} N^{(n)}(r_1) {}^t V_{2i}^{(n)} \quad (10)$$

$$\frac{\partial^t x_i}{\partial r_1} = \frac{b}{2} N^{(n)}(r_1) {}^t V_{3i}^{(n)} \quad (11)$$

## ひずみの計算 2

- また, 変位  $u$  の微分  $\partial u_i / \partial r_j$  は以下ようになる.

$$\frac{\partial}{\partial r_1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{\partial N^{(n)}(r_1)}{\partial r_1} \left[ \begin{Bmatrix} u_1^{(n)} \\ u_2^{(n)} \\ u_3^{(n)} \end{Bmatrix} + \frac{a}{2} r_2 \begin{bmatrix} 0 & V_{23}^{(n)} & -V_{22}^{(n)} \\ -V_{23}^{(n)} & 0 & V_{21}^{(n)} \\ V_{22}^{(n)} & -V_{21}^{(n)} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1^{(n)} \\ \theta_2^{(n)} \\ \theta_3^{(n)} \end{Bmatrix} \right. \\ \left. + \frac{b}{2} r_3 \begin{bmatrix} 0 & V_{33}^{(n)} & -V_{32}^{(n)} \\ -V_{33}^{(n)} & 0 & V_{31}^{(n)} \\ V_{32}^{(n)} & -V_{31}^{(n)} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1^{(n)} \\ \theta_2^{(n)} \\ \theta_3^{(n)} \end{Bmatrix} \right] \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial r_2} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{a}{2} N^{(n)}(r_1) \begin{bmatrix} 0 & V_{23}^{(n)} & -V_{22}^{(n)} \\ -V_{23}^{(n)} & 0 & V_{21}^{(n)} \\ V_{22}^{(n)} & -V_{21}^{(n)} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1^{(n)} \\ \theta_2^{(n)} \\ \theta_3^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial r_3} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{b}{2} N^{(n)}(r_1) \begin{bmatrix} 0 & V_{33}^{(n)} & -V_{32}^{(n)} \\ -V_{33}^{(n)} & 0 & V_{31}^{(n)} \\ V_{32}^{(n)} & -V_{31}^{(n)} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1^{(n)} \\ \theta_2^{(n)} \\ \theta_3^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

## ひずみの計算 3

- それぞれの成分を具体的に計算すると以下のようになる.

$$\frac{\partial u_1}{\partial r_1} = \tag{15}$$

$$\frac{\partial N^{(n)}(r_1)}{\partial r_1} \left[ u_1^{(n)} + \left( \frac{a}{2} r_2 V_{23}^{(n)} + \frac{b}{2} r_3 V_{33}^{(n)} \right) \theta_2^{(n)} + \left( -\frac{a}{2} r_2 V_{22}^{(n)} - \frac{b}{2} r_3 V_{32}^{(n)} \right) \theta_3^{(n)} \right] \tag{16}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial r_1} = \tag{17}$$

$$\frac{\partial N^{(n)}(r_1)}{\partial r_1} \left[ u_2^{(n)} + \left( -\frac{a}{2} r_2 V_{23}^{(n)} - \frac{b}{2} r_3 V_{33}^{(n)} \right) \theta_1^{(n)} + \left( \frac{a}{2} r_2 V_{21}^{(n)} - \frac{b}{2} r_3 V_{31}^{(n)} \right) \theta_3^{(n)} \right] \tag{18}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial r_1} = \tag{19}$$

$$\frac{\partial N^{(n)}(r_1)}{\partial r_1} \left[ u_3^{(n)} + \left( \frac{a}{2} r_2 V_{22}^{(n)} + \frac{b}{2} r_3 V_{32}^{(n)} \right) \theta_1^{(n)} + \left( -\frac{a}{2} r_2 V_{21}^{(n)} - \frac{b}{2} r_3 V_{31}^{(n)} \right) \theta_2^{(n)} \right] \tag{20}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial r_2} = \frac{a}{2} N^{(n)}(r_1) V_{23}^{(n)} \theta_2^{(n)} - \frac{a}{2} N^{(n)}(r_1) V_{22}^{(n)} \theta_3^{(n)} \tag{21}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial r_2} = -\frac{a}{2} N^{(n)}(r_1) V_{23}^{(n)} \theta_1^{(n)} + \frac{a}{2} N^{(n)}(r_1) V_{21}^{(n)} \theta_3^{(n)} \tag{22}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial r_2} = \frac{a}{2} N^{(n)}(r_1) V_{22}^{(n)} \theta_1^{(n)} - \frac{a}{2} N^{(n)}(r_1) V_{21}^{(n)} \theta_2^{(n)} \tag{23}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial r_3} = \frac{b}{2} N^{(n)}(r_1) V_{33}^{(n)} \theta_2^{(n)} - \frac{b}{2} N^{(n)}(r_1) V_{32}^{(n)} \theta_3^{(n)} \tag{24}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial r_3} = -\frac{b}{2} N^{(n)}(r_1) V_{33}^{(n)} \theta_1^{(n)} + \frac{b}{2} N^{(n)}(r_1) V_{31}^{(n)} \theta_3^{(n)} \tag{25}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial r_3} = \frac{b}{2} N^{(n)}(r_1) V_{32}^{(n)} \theta_1^{(n)} - \frac{b}{2} N^{(n)}(r_1) V_{31}^{(n)} \theta_2^{(n)} \tag{26}$$

# ひずみの計算 4

- 記述の整理のため、添字の対応を以下のように変更する.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \implies \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = J_{ik}^{-1} \frac{\partial u_j}{\partial r_k} \quad (27)$$

- 各成分を計算する.

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_i} = J_{i1}^{-1} \frac{\partial u_1}{\partial r_1} + J_{i2}^{-1} \frac{\partial u_1}{\partial r_2} + J_{i3}^{-1} \frac{\partial u_1}{\partial r_3} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} &= J_{i1}^{-1} \frac{\partial N^{(n)}(r_1)}{\partial r_1} \left\{ u_1^{(n)} + \left( \frac{a}{2} r_2 V_{23}^{(n)} + \frac{b}{2} r_3 V_{23}^{(n)} \right) \theta_2^{(n)} + \left( -\frac{a}{2} r_2 V_{22}^{(n)} - \frac{b}{2} r_3 V_{32}^{(n)} \right) \theta_3^{(n)} \right\} \\ &+ J_{i2}^{-1} \left\{ \frac{a}{2} N^{(n)}(r_1) V_{22}^{(n)} \theta_2^{(n)} - \frac{a}{2} N^{(n)}(r_1) V_{22}^{(n)} \theta_3^{(n)} \right\} \\ &+ J_{i3}^{-1} \left\{ \frac{b}{2} N^{(n)}(r_1) V_{33}^{(n)} \theta_2^{(n)} - \frac{b}{2} N^{(n)}(r_1) V_{32}^{(n)} \theta_3^{(n)} \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} &= J_{i1}^{-1} \frac{\partial N^{(n)}(r_1)}{\partial r_1} u_1^{(n)} \\ &+ \left\{ J_{i1}^{-1} \frac{\partial N^{(n)}(r_1)}{\partial r_1} \left( \frac{a}{2} r_2 V_{23}^{(n)} + \frac{b}{2} r_3 V_{33}^{(n)} \right) + J_{i2}^{-1} \frac{a}{2} N^{(n)}(r_1) V_{23}^{(n)} + J_{i3}^{-1} \frac{b}{2} N^{(n)}(r_1) V_{33}^{(n)} \right\} \theta_2^{(n)} \\ &+ \left\{ J_{i1}^{-1} \frac{\partial N^{(n)}(r_1)}{\partial r_1} \left( -\frac{a}{2} r_2 V_{22}^{(n)} - \frac{b}{2} r_3 V_{32}^{(n)} \right) - J_{i2}^{-1} \frac{a}{2} N^{(n)}(r_1) V_{22}^{(n)} - J_{i3}^{-1} \frac{b}{2} N^{(n)}(r_1) V_{32}^{(n)} \right\} \theta_3^{(n)} \end{aligned} \quad (30)$$

ここで  $\partial u_1 / \partial x_i$  の回転成分  $\theta_m^{(n)}$  の係数を  $(G_m^{(n)})_{1i}$  と表す. 即ち

$$(G_1^{(n)})_{1i} = 0 \quad (31)$$

$$(G_2^{(n)})_{1i} = J_{i1}^{-1} \frac{\partial N^{(n)}(r_1)}{\partial r_1} \left( \frac{a}{2} r_2 V_{23}^{(n)} + \frac{b}{2} r_3 V_{33}^{(n)} \right) + J_{i2}^{-1} \frac{a}{2} N^{(n)}(r_1) V_{23}^{(n)} + J_{i3}^{-1} \frac{b}{2} N^{(n)}(r_1) V_{33}^{(n)} \quad (32)$$

$$(G_3^{(n)})_{1i} = J_{i1}^{-1} \frac{\partial N^{(n)}(r_1)}{\partial r_1} \left( -\frac{a}{2} r_2 V_{22}^{(n)} - \frac{b}{2} r_3 V_{32}^{(n)} \right) - J_{i2}^{-1} \frac{a}{2} N^{(n)}(r_1) V_{22}^{(n)} - J_{i3}^{-1} \frac{b}{2} N^{(n)}(r_1) V_{32}^{(n)} \quad (33)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_i} = J_{i1}^{-1} \frac{\partial u_2}{\partial r_1} + J_{i2}^{-1} \frac{\partial u_2}{\partial r_2} + J_{i3}^{-1} \frac{\partial u_2}{\partial r_3} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} &= J_{i1}^{-1} \frac{\partial N^{(n)}(r_1)}{\partial r_1} \left\{ u_2^{(n)} + \left( -\frac{a}{2} r_2 V_{23}^{(n)} - \frac{b}{2} r_3 V_{33}^{(n)} \right) \theta_1^{(n)} + \left( \frac{a}{2} r_2 V_{21}^{(n)} + \frac{b}{2} r_3 V_{31}^{(n)} \right) \theta_3^{(n)} \right\} \\ &+ J_{i2}^{-1} \left\{ -\frac{a}{2} N^{(n)}(r_1) V_{23}^{(n)} \theta_1^{(n)} + \frac{a}{2} N^{(n)}(r_1) V_{21}^{(n)} \theta_3^{(n)} \right\} \\ &+ J_{i3}^{-1} \left\{ -\frac{b}{2} N^{(n)}(r_1) V_{33}^{(n)} \theta_1^{(n)} + \frac{b}{2} N^{(n)}(r_1) V_{31}^{(n)} \theta_3^{(n)} \right\} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} &= J_{i1}^{-1} \frac{\partial N^{(n)}(r_1)}{\partial r_1} u_2^{(n)} \\ &+ \left\{ J_{i1}^{-1} \frac{\partial N^{(n)}(r_1)}{\partial r_1} \left( -\frac{a}{2} r_2 V_{23}^{(n)} - \frac{b}{2} r_3 V_{33}^{(n)} \right) - J_{i2}^{-1} \frac{a}{2} N^{(n)}(r_1) V_{23}^{(n)} - J_{i3}^{-1} \frac{b}{2} N^{(n)}(r_1) V_{33}^{(n)} \right\} \theta_1^{(n)} \\ &+ \left\{ J_{i1}^{-1} \frac{\partial N^{(n)}(r_1)}{\partial r_1} \left( \frac{a}{2} r_2 V_{21}^{(n)} + \frac{b}{2} r_3 V_{31}^{(n)} \right) + J_{i2}^{-1} \frac{a}{2} N^{(n)}(r_1) V_{21}^{(n)} + J_{i3}^{-1} \frac{b}{2} N^{(n)}(r_1) V_{31}^{(n)} \right\} \theta_3^{(n)} \end{aligned} \quad (36)$$

ここで  $\partial u_1/\partial x_i$  の時と同様に  $\partial u_2/\partial x_i$  の回転成分  $\theta_m^{(n)}$  の係数を  $(G_m^{(n)})_{2i}$  と表す. 即ち

$$(G_1^{(n)})_{2i} = J_{i1}^{-1} \frac{\partial N^{(n)}(r_1)}{\partial r_1} \left( -\frac{a}{2} r_2 V_{23}^{(n)} - \frac{b}{2} r_3 V_{33}^{(n)} \right) - J_{i2}^{-1} \frac{a}{2} N^{(n)}(r_1) V_{23}^{(n)} - J_{i3}^{-1} \frac{b}{2} N^{(n)}(r_1) V_{33}^{(n)} \quad (37)$$

$$(G_2^{(n)})_{2i} = 0 \quad (38)$$

$$(G_3^{(n)})_{2i} = J_{i1}^{-1} \frac{\partial N^{(n)}(r_1)}{\partial r_1} \left( \frac{a}{2} r_2 V_{21}^{(n)} + \frac{b}{2} r_3 V_{31}^{(n)} \right) + J_{i2}^{-1} \frac{a}{2} N^{(n)}(r_1) V_{21}^{(n)} + J_{i3}^{-1} \frac{b}{2} N^{(n)}(r_1) V_{31}^{(n)} \quad (39)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_i} = J_{i1}^{-1} \frac{\partial u_3}{\partial r_1} + J_{i2}^{-1} \frac{\partial u_3}{\partial r_2} + J_{i3}^{-1} \frac{\partial u_3}{\partial r_3} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} &= J_{i1}^{-1} \frac{\partial N^{(n)}(r_1)}{\partial r_1} \left\{ u_3^{(n)} + \left( \frac{a}{2} r_2 V_{22}^{(n)} + \frac{b}{2} r_3 V_{32}^{(n)} \right) \theta_1^{(n)} + \left( -\frac{a}{2} r_2 V_{21}^{(n)} - \frac{b}{2} r_3 V_{31}^{(n)} \right) \theta_2^{(n)} \right\} \\ &+ J_{i2}^{-1} \left\{ \frac{a}{2} N^{(n)}(r_1) V_{22}^{(n)} \theta_1^{(n)} - \frac{a}{2} N^{(n)}(r_1) V_{21}^{(n)} \theta_2^{(n)} \right\} \\ &+ J_{i3}^{-1} \left\{ \frac{b}{2} N^{(n)}(r_1) V_{32}^{(n)} \theta_1^{(n)} - \frac{b}{2} N^{(n)}(r_1) V_{31}^{(n)} \theta_2^{(n)} \right\} \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} &= J_{i1}^{-1} \frac{\partial N^{(n)}(r_1)}{\partial r_1} u_3^{(n)} \\ &+ \left\{ J_{i1}^{-1} \frac{\partial N^{(n)}(r_1)}{\partial r_1} \left( \frac{a}{2} r_2 V_{22}^{(n)} + \frac{b}{2} r_3 V_{32}^{(n)} \right) + J_{i2}^{-1} \frac{a}{2} N^{(n)}(r_1) V_{22}^{(n)} + J_{i3}^{-1} \frac{b}{2} N^{(n)}(r_1) V_{32}^{(n)} \right\} \theta_1^{(n)} \\ &+ \left\{ J_{i1}^{-1} \frac{\partial N^{(n)}(r_1)}{\partial r_1} \left( -\frac{a}{2} r_2 V_{21}^{(n)} - \frac{b}{2} r_3 V_{31}^{(n)} \right) - J_{i2}^{-1} \frac{a}{2} N^{(n)}(r_1) V_{21}^{(n)} - J_{i3}^{-1} \frac{b}{2} N^{(n)}(r_1) V_{31}^{(n)} \right\} \theta_2^{(n)} \end{aligned} \quad (42)$$

ここでも同様に  $\partial u_3 / \partial x_i$  の回転成分  $\theta_m^{(n)}$  の係数を  $(G_m^{(n)})_{3i}$  と表す. 即ち

$$(G_1^{(n)})_{3i} = J_{i1}^{-1} \frac{\partial N^{(n)}(r_1)}{\partial r_1} \left( \frac{a}{2} r_2 V_{22}^{(n)} + \frac{b}{2} r_3 V_{32}^{(n)} \right) + J_{i2}^{-1} \frac{a}{2} N^{(n)}(r_1) V_{22}^{(n)} + J_{i3}^{-1} \frac{b}{2} N^{(n)}(r_1) V_{32}^{(n)} \quad (43)$$

$$(G_2^{(n)})_{3i} = J_{i1}^{-1} \frac{\partial N^{(n)}(r_1)}{\partial r_1} \left( -\frac{a}{2} r_2 V_{21}^{(n)} - \frac{b}{2} r_3 V_{31}^{(n)} \right) - J_{i2}^{-1} \frac{a}{2} N^{(n)}(r_1) V_{21}^{(n)} - J_{i3}^{-1} \frac{b}{2} N^{(n)}(r_1) V_{31}^{(n)} \quad (44)$$

$$(G_3^{(n)})_{3i} = 0 \quad (45)$$

## ひずみの計算 5

- 以上をまとめると微小ひずみは以下のようにマトリックス表示できる.

$$\begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{12} \\ 2E_{23} \\ 2E_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \end{bmatrix} = [\bar{B}] \{u^{(n)}\} \quad (46)$$

ただし,

$$\{u^{(n)}\} = \{u_1^{(1)} \ u_2^{(1)} \ u_3^{(1)} \ \theta_1^{(1)} \ \theta_2^{(1)} \ \theta_3^{(1)} \ \cdots \ u_1^{(n)} \ u_2^{(n)} \ u_3^{(n)} \ \theta_1^{(n)} \ \theta_2^{(n)} \ \theta_3^{(n)}\} \quad (47)$$

$$[\bar{B}] = \left[ \begin{array}{c} [\bar{B}_1] \\ [\bar{B}_2] \\ \cdots \\ [\bar{B}_n] \end{array} \right] \quad (48)$$

$$[\bar{B}_n] = \begin{bmatrix} J_{11}^{-1} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_1} & 0 & 0 & 0 & (G2)_{11} & (G3)_{11} \\ 0 & J_{21}^{-1} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_1} & 0 & (G1)_{22} & 0 & (G3)_{22} \\ 0 & 0 & J_{31}^{-1} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_1} & (G1)_{33} & (G2)_{33} & 0 \\ 0 & 0 & J_{31}^{-1} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_1} & (G1)_{33} & (G2)_{33} & 0 \\ J_{21}^{-1} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_1} & J_{11}^{-1} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_1} & 0 & (G1)_{21} & (G2)_{12} & (G3)_{12} + (G3)_{21} \\ 0 & J_{31}^{-1} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_1} & J_{21}^{-1} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_1} & (G1)_{23} + (G1)_{32} & (G2)_{32} & (G3)_{23} \\ J_{31}^{-1} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_1} & 0 & J_{11}^{-1} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial r_1} & (G1)_{31} & (G2)_{31} + (G2)_{13} & (G3)_{13} \end{bmatrix} \quad (49)$$

## ひずみの計算 6

- total-Lagrane 法により定式化すると , Green-Lagrange ひずみなどで  $\frac{\partial^t u_i}{\partial X_j}$  の項が現れるが , これは

$$\begin{aligned} \frac{\partial^t u_i}{\partial X_j} &= \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_j} t u_i^{(n)} \\ &+ \frac{a}{2} \frac{\partial r_2 N^{(n)}}{\partial X_j} \left( {}^t \mathbf{V}_{2i}^{(n)} - {}^0 \mathbf{V}_{2i}^{(n)} \right) \\ &+ \frac{b}{2} \frac{\partial r_3 N^{(n)}}{\partial X_j} \left( {}^t \mathbf{V}_{3i}^{(n)} - {}^0 \mathbf{V}_{3i}^{(n)} \right) \end{aligned} \quad (50)$$

# ソリッド要素の場合 1

- $\delta E_{ij}$  を成分表示すると

$$\delta E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial X_j} \right)$$

$$\begin{aligned} \delta E_{11} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_1} \right) \\ \delta E_{22} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_2} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_2} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_2} \frac{\partial u_3}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_2} \right) \\ \delta E_{33} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_3} + \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_3} + \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_3} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_3} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_3} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_3} \right) \\ \delta E_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_2} \right) \\ \delta E_{23} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_2} + \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_2} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_2} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_2} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_3} \right) \\ \delta E_{31} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_3} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_3} \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_3} \frac{\partial u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_1} \right) \end{aligned}$$

- これより,

$$[Z_1] \equiv \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & 0 & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & 0 & 0 & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} & 0 & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} & 0 & 0 & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & 0 & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & 0 & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_3} & 0 & 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \frac{\partial \delta u}{\partial X} \right\} \equiv \left\{ \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_1} \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_2} \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_3} \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_1} \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_2} \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_3} \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_1} \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_2} \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_3} \right\}^T$$

$$\{\delta E\} = [Z_1] \left\{ \frac{\partial \delta u}{\partial X} \right\}$$

- このマトリックスに現れる  $\frac{\partial u_i}{\partial X_j}$  については, 下式に従い求める

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_j} u_i^{(n)}$$

## ソリッド要素の場合 2

- 同様に  $\frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j}$  については,

$$\frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_j} \delta u_i^{(n)}$$

- これを用いて  $\left\{ \frac{\partial \delta u}{\partial X} \right\}$  を節点変位で表すと

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_1} & & & \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_1} \\ \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_2} & & & \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} \\ \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_3} & & & \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_3} \\ & \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_1} & & \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_1} \\ & \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} \\ & \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_3} & & \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_3} \\ & & \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_1} & \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_1} \\ & & \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_2} & \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} \\ & & \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_3} & \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_1^{(1)} \\ \delta u_2^{(1)} \\ \delta u_3^{(1)} \\ \vdots \\ \delta u_1^{(n)} \\ \delta u_2^{(n)} \\ \delta u_3^{(n)} \end{pmatrix}$$

となる.

- 上式中の 9 行  $3n$  列のマトリクスを  $[Z_2]$ , つまり

$$\left\{ \frac{\partial \delta u}{\partial X} \right\} = [Z_2] \{ \delta u^{(n)} \}$$

となるように定義する

## ソリッド要素との違い

- ソリッド要素の  $[Z_2]$

$$[Z_2] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ \frac{\partial N}{\partial X_2} & 0 & 0 \\ \frac{\partial N}{\partial X_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N}{\partial X_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial X_1} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial X_2} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

● 梁要素の  $[Z_2]$

$$[Z_2] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial X_1} & 0 & 0 & 0 & (G_2)_{11} & (G_3)_{11} \\ \frac{\partial N}{\partial X_2} & 0 & 0 & 0 & (G_2)_{12} & (G_3)_{12} \\ \frac{\partial N}{\partial X_3} & 0 & 0 & 0 & (G_2)_{13} & (G_3)_{13} \\ 0 & \frac{\partial N}{\partial X_1} & 0 & (G_1)_{21} & 0 & (G_3)_{21} \\ 0 & \frac{\partial N}{\partial X_2} & 0 & (G_1)_{22} & 0 & (G_3)_{22} \\ 0 & \frac{\partial N}{\partial X_3} & 0 & (G_1)_{23} & 0 & (G_3)_{23} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial X_1} & (G_1)_{31} & (G_2)_{31} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial X_2} & (G_1)_{32} & (G_2)_{32} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial X_3} & (G_1)_{33} & (G_2)_{33} & 0 \end{bmatrix}$$

## 構成則マトリックス

- 梁要素の構成則は局所座標系  $e'_i$  で次のように表される。ただし局所座標系の成分には ' をつけて表すものとする。

$$T'_{11} = EE'_{11} \quad (51)$$

$$T'_{12} = 2kGE'_{12} \quad (52)$$

$$T'_{21} = 2kGE'_{21} \quad (53)$$

$$T'_{13} = 2kGE'_{13} \quad (54)$$

$$T'_{31} = 2kGE'_{31} \quad (55)$$

ここで、 $E$  はヤング率、 $G$  はせん断弾性係数、 $k$  はせん断修正係数である。

- 前述のようにひずみは全体座標系のものが用いられている
- 構成則を全体座標系に座標変換するか、ひずみを局所座標系に座標変換するかのどちらかを施す必要がある。

# 構成則マトリックス

## (1) 構成則を変換する場合

- 一般に全体座標系での構成則テンソル  $C_{ijkl}$  と、局所座標系での構成則テンソル  $C'_{mnop}$  の間には以下の関係がある.

$$\begin{aligned}
 C_{ijkl} &= C'_{mnop} (e'_m \cdot e_i) (e'_n \cdot e_j) (e'_o \cdot e_k) (e'_p \cdot e_l) \\
 &= C'_{mnop} P_{mi} P_{nj} P_{ok} P_{pl}
 \end{aligned}
 \tag{56}$$

式 (51) ~ (55) を参照すると、局所座標系での構成則は以下ようになる。ただし、これ以外の成分はすべて 0 である。

$$C'_{1111} = E \tag{57}$$

$$C'_{1212} = 2kG \tag{58}$$

$$C'_{2121} = 2kG \tag{59}$$

$$C'_{1313} = 2kG \tag{60}$$

$$C'_{3131} = 2kG \tag{61}$$

式 (56) に従い座標変換すると, たとえば,

$$\begin{aligned}
 C_{1212} &= C'_{1111} P_{11} P_{12} P_{11} P_{12} \\
 &+ C'_{1212} P_{11} P_{22} \underline{P_{11} P_{22}} \\
 &+ C'_{2121} P_{21} P_{12} \underline{P_{21} P_{12}} \\
 &+ C'_{1313} P_{11} P_{32} \underline{P_{11} P_{32}} \\
 &+ C'_{3131} P_{31} P_{12} \underline{P_{31} P_{12}}
 \end{aligned} \tag{62}$$

$$\begin{aligned}
 C_{2121} &= C'_{1111} P_{11} P_{12} P_{12} P_{11} \\
 &+ C'_{1212} P_{11} P_{22} \underline{P_{12} P_{21}} \\
 &+ C'_{2121} P_{21} P_{12} \underline{P_{22} P_{11}} \\
 &+ C'_{1313} P_{11} P_{32} \underline{P_{12} P_{31}} \\
 &+ C'_{3131} P_{31} P_{12} \underline{P_{32} P_{11}}
 \end{aligned} \tag{63}$$

となるが, 式 (62) と式 (63) は下線部分が異なるので

$$C_{1212} \neq C_{2121} \tag{64}$$

となる. ここでは, 以下の方法に従って, 構成則マトリックスを導く. 全体座標系での応力 –

ひずみ関係は以下のように表される.

$$T_{ij} = C_{ijkl}E_{kl} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} &= C_{ij11}E_{11} + C_{ij12}E_{12} + C_{ij13}E_{13} \\ &+ C_{ij21}E_{21} + C_{ij22}E_{22} + C_{ij23}E_{23} \\ &+ C_{ij31}E_{31} + C_{ij32}E_{32} + C_{ij33}E_{33} \end{aligned} \quad (66)$$

ここで,  $E_{kl} = E_{lk}$  を用いると, 式(66)は以下のように変更できる.

$$\begin{aligned} T_{ij} &= C_{ij11}E_{11} + C_{ij22}E_{22} + C_{ij33}E_{33} \\ &+ (C_{ij12} + C_{ij21})E_{12} + (C_{ij23} + C_{ij32})E_{23} + (C_{ij31} + C_{ij13})E_{31} \end{aligned} \quad (67)$$

ここで,

$$\tilde{C}_{ijkl} = \frac{1}{2}(C_{ijkl} + C_{ijlk}) \quad (68)$$

とすれば, 式(67)はさらに以下のように変更できる.

$$T_{ij} = \tilde{C}_{ij11}E_{11} + \tilde{C}_{ij22}E_{22} + \tilde{C}_{ij33}E_{33} + \tilde{C}_{ij12}2E_{12} + \tilde{C}_{ij23}2E_{23} + \tilde{C}_{ij31}2E_{31} \quad (69)$$

これをマトリックス表示すると以下のようになる.

$$\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{12} \\ T_{23} \\ T_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{1111} & \tilde{C}_{1122} & \tilde{C}_{1133} & \tilde{C}_{1112} & \tilde{C}_{1123} & \tilde{C}_{1131} \\ \tilde{C}_{2211} & \tilde{C}_{2222} & \tilde{C}_{2233} & \tilde{C}_{2212} & \tilde{C}_{2223} & \tilde{C}_{2231} \\ \tilde{C}_{3311} & \tilde{C}_{3322} & \tilde{C}_{3333} & \tilde{C}_{3312} & \tilde{C}_{3323} & \tilde{C}_{3331} \\ \tilde{C}_{1211} & \tilde{C}_{1222} & \tilde{C}_{1233} & \tilde{C}_{1212} & \tilde{C}_{1223} & \tilde{C}_{1231} \\ \tilde{C}_{2311} & \tilde{C}_{2322} & \tilde{C}_{2333} & \tilde{C}_{2312} & \tilde{C}_{2323} & \tilde{C}_{2331} \\ \tilde{C}_{3111} & \tilde{C}_{3122} & \tilde{C}_{3133} & \tilde{C}_{3112} & \tilde{C}_{3123} & \tilde{C}_{3131} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{12} \\ E_{23} \\ E_{31} \end{bmatrix} \quad (70)$$

このようにして得られた構成則マトリックス  $[\tilde{C}]$  を以下のように定義する.

$$[\tilde{C}] = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{1111} & \tilde{C}_{1122} & \tilde{C}_{1133} & \tilde{C}_{1112} & \tilde{C}_{1123} & \tilde{C}_{1131} \\ \tilde{C}_{2211} & \tilde{C}_{2222} & \tilde{C}_{2233} & \tilde{C}_{2212} & \tilde{C}_{2223} & \tilde{C}_{2231} \\ \tilde{C}_{3311} & \tilde{C}_{3322} & \tilde{C}_{3333} & \tilde{C}_{3312} & \tilde{C}_{3323} & \tilde{C}_{3331} \\ \tilde{C}_{1211} & \tilde{C}_{1222} & \tilde{C}_{1233} & \tilde{C}_{1212} & \tilde{C}_{1223} & \tilde{C}_{1231} \\ \tilde{C}_{2311} & \tilde{C}_{2322} & \tilde{C}_{2333} & \tilde{C}_{2312} & \tilde{C}_{2323} & \tilde{C}_{2331} \\ \tilde{C}_{3111} & \tilde{C}_{3122} & \tilde{C}_{3133} & \tilde{C}_{3112} & \tilde{C}_{3123} & \tilde{C}_{3131} \end{bmatrix} \quad (71)$$

次に,  $[\tilde{C}]$  マトリックスが対称行列であることを確認する.  $[\tilde{C}]$  マトリックスが対称であるためには,

$$\tilde{C}_{ijkl} = \tilde{C}_{ijlk} \quad (72)$$

が成立する必要がある、 $\tilde{C}_{ijkl}, \tilde{C}_{ijlk}$  はそれぞれ

$$\tilde{C}_{ijkl} = \frac{1}{2} (C_{ijkl} + C_{ijlk}) \quad (73)$$

$$\tilde{C}_{ijkl} = \frac{1}{2} (C_{klij} + C_{klji}) \quad (74)$$

と書け、また、各成分は

$$\begin{aligned} C_{ijkl} = & C'_{1111} P_{1i} P_{1j} P_{1k} P_{1l} \\ & + C'_{1212} P_{1i} P_{2j} P_{1k} P_{2l} \\ & + C'_{2121} P_{2i} P_{1j} P_{2k} P_{1l} \\ & + C'_{1313} P_{1i} P_{3j} P_{1k} P_{3l} \\ & + C'_{3131} P_{3i} P_{1j} P_{3k} P_{1l} \end{aligned} \quad (75)$$

$$\begin{aligned} C_{ijlk} = & C'_{1111} P_{1i} P_{1j} P_{1l} P_{1k} \\ & + C'_{1212} P_{1i} P_{2j} P_{1l} P_{2k} \\ & + C'_{2121} P_{2i} P_{1j} P_{2l} P_{1k} \\ & + C'_{1313} P_{1i} P_{3j} P_{1l} P_{3k} \\ & + C'_{3131} P_{3i} P_{1j} P_{3l} P_{1k} \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned}
C_{klij} &= C'_{1111} P_{1k} P_{1l} P_{1i} P_{1j} \\
&+ C'_{1212} P_{1k} P_{2l} P_{1i} P_{2j} \\
&+ C'_{2121} P_{2k} P_{1l} P_{2i} P_{1j} \\
&+ C'_{1313} P_{1k} P_{3l} P_{1i} P_{3j} \\
&+ C'_{3131} P_{3k} P_{1l} P_{3i} P_{1j}
\end{aligned} \tag{77}$$

$$\begin{aligned}
C_{klij} &= C'_{1111} P_{1k} P_{1l} P_{1j} P_{1i} \\
&+ C'_{1212} P_{1k} P_{2l} P_{1j} P_{2i} \\
&+ C'_{2121} P_{2k} P_{1l} P_{2j} P_{1i} \\
&+ C'_{1313} P_{1k} P_{3l} P_{1j} P_{3i} \\
&+ C'_{3131} P_{3k} P_{1l} P_{3j} P_{1i}
\end{aligned} \tag{78}$$

となる. よって, 下式から  $[\tilde{C}]$  が対称になることが確認できる.

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_{ijkl} &= \frac{1}{2} \left\{ C'_{1111} (P_{1i} P_{1j} P_{1k} P_{1l} + P_{1i} P_{1j} P_{1l} P_{1k}) \right. \\
&+ C'_{1212} (P_{1i} P_{2j} P_{1k} P_{2l} + P_{1i} P_{2j} P_{1l} P_{2k}) \\
&+ C'_{2121} (P_{2i} P_{1j} P_{2k} P_{1l} + P_{2i} P_{1j} P_{2l} P_{1k}) \\
&+ C'_{1313} (P_{1i} P_{3j} P_{1k} P_{3l} + P_{1i} P_{3j} P_{1l} P_{3k}) \\
&\left. + C'_{3131} (P_{3i} P_{1j} P_{3k} P_{1l} + P_{3i} P_{1j} P_{3l} P_{1k}) \right\}
\end{aligned} \tag{79}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_{klj} = \frac{1}{2} \{ & C'_{1111} (P_{1k}P_{1l}P_{1i}P_{1j} + P_{1k}P_{1l}P_{1j}P_{1i}) \\
& + C'_{1212} (P_{1k}P_{2l}P_{1i}P_{2j} + P_{1k}P_{2l}P_{1j}P_{2i}) \\
& + C'_{2121} (P_{2k}P_{1l}P_{2i}P_{1j} + P_{2k}P_{1l}P_{2j}P_{1i}) \\
& + C'_{1313} (P_{1k}P_{3l}P_{1i}P_{3j} + P_{1k}P_{3l}P_{1j}P_{3i}) \\
& + C'_{3131} (P_{3k}P_{1l}P_{3i}P_{1j} + P_{3k}P_{1l}P_{3j}P_{1i}) \}
\end{aligned} \tag{80}$$

## 構成則マトリックス (2) ひずみを変換する場合

- 局所座標系では、全体座標系と同じように以下のような関係式が成り立つ。

$$\delta E_{ij}' T_{ij}' = \left\{ \delta E_{11}' \quad \delta E_{22}' \quad \delta E_{33}' \quad 2\delta E_{12}' \quad 2\delta E_{23}' \quad 2\delta E_{31}' \right\} \begin{pmatrix} T_{11}' \\ T_{22}' \\ T_{33}' \\ T_{12}' \\ T_{23}' \\ T_{31}' \end{pmatrix} \quad (81)$$

このうち

$$T_{22}' = T_{33}' = T_{23}' = 0 \quad (82)$$

なので、式(81)は以下のようなになる。

$$\delta E_{ij}' T_{ij}' = \left\{ \delta E_{11}' \quad 2\delta E_{12}' \quad 2\delta E_{31}' \right\} \begin{pmatrix} T_{11}' \\ T_{12}' \\ T_{31}' \end{pmatrix} \quad (83)$$

ここで局所座標系での応力 - ひずみ関係は以下のように表せる。

$$T_{ij}' = C_{ijkl} E_{kl}' \quad (84)$$

必要なもののみとり出せば以下のようなになる。

$$\begin{aligned} T'_{11} &= EE'_{11} \\ T'_{12} &= 2kGE'_{12} \\ T'_{31} &= 2kGE'_{31} \end{aligned} \tag{85}$$

これをマトリックス表示すると以下のようなになる。

$$\begin{Bmatrix} T'_{11} \\ T'_{12} \\ T'_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & & \\ & kG & \\ & & kG \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E'_{11} \\ 2E'_{12} \\ 2E'_{31} \end{Bmatrix} \tag{86}$$

局所座標系でのひずみ  $E'_{op}$  と全体座標系でのひずみ  $E_{kl}$  には以下の関係がある。

$$E'_{op} = E_{kl} P_{ok} P_{pl} \tag{87}$$

$$\begin{aligned} &= E_{11} P_{o1} P_{p1} + E_{12} P_{o1} P_{p2} + E_{13} P_{o1} P_{p3} \\ &+ E_{21} P_{o2} P_{p1} + E_{22} P_{o2} P_{p2} + E_{23} P_{o2} P_{p3} \end{aligned} \tag{88}$$

$$\begin{aligned} &+ E_{31} P_{o3} P_{p1} + E_{32} P_{o3} P_{p2} + E_{33} P_{o3} P_{p3} \\ &= E_{11} P_{o1} P_{p1} + E_{22} P_{o2} P_{p2} + E_{33} P_{o3} P_{p3} \\ &+ (P_{o1} P_{p2} + P_{o2} P_{p1}) E_{12} + (P_{o2} P_{p3} + P_{o3} P_{p2}) E_{23} + (P_{o3} P_{p1} + P_{o1} P_{p3}) E_{31} \end{aligned} \tag{89}$$

ただし, 上式では  $E_{kl} = E_{lk}$  を用いている。これをマトリックス表示すると以下のように表す

ことができる.

$$\begin{bmatrix} E'_{11} \\ 2E'_{12} \\ 2E'_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}P_{11} & P_{12}P_{12} & P_{13}P_{13} & P_{11}P_{12} & P_{12}P_{13} & P_{13}P_{11} \\ 2P_{11}P_{21} & 2P_{12}P_{22} & 2P_{13}P_{23} & P_{11}P_{22} + P_{12}P_{21} & P_{12}P_{23} + P_{13}P_{22} & P_{13}P_{21} + P_{11}P_{23} \\ 2P_{11}P_{31} & 2P_{32}P_{12} & 2P_{33}P_{13} & P_{31}P_{12} + P_{32}P_{11} & P_{32}P_{13} + P_{33}P_{12} & P_{33}P_{11} + P_{31}P_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{12} \\ 2E_{23} \\ 2E_{31} \end{bmatrix} \quad (90)$$

ここで, 変換行列を以下のように定義する.

$$[P] = \begin{bmatrix} P_{11}P_{11} & P_{12}P_{12} & P_{13}P_{13} & P_{11}P_{12} & P_{12}P_{13} & P_{13}P_{11} \\ 2P_{11}P_{21} & 2P_{12}P_{22} & 2P_{13}P_{23} & P_{11}P_{22} + P_{12}P_{21} & P_{12}P_{23} + P_{13}P_{22} & P_{13}P_{21} + P_{11}P_{23} \\ 2P_{11}P_{31} & 2P_{32}P_{12} & 2P_{33}P_{13} & P_{31}P_{12} + P_{32}P_{11} & P_{32}P_{13} + P_{33}P_{12} & P_{33}P_{11} + P_{31}P_{13} \end{bmatrix} \quad (91)$$

全体座標系と局所座標系での諸量の関係を用いると, 下式が成立する.

$$\delta E_{ij}T_{ij} = \delta E_{ij}C_{ijkkl}E_{kl} \quad (92)$$

$$= \delta E_{ij} \left( C'_{mnop}P_{mi}P_{nj}P_{ok}P_{pl} \right) E_{kl} \quad (93)$$

$$= (\delta E_{ij}P_{mi}P_{nj}) C'_{mnop} (P_{ok}P_{pl}E_{kl}) \quad (94)$$

$$= \delta E'_{mn}C'_{mnop}E'_{op} \quad (95)$$

$$= \delta E'_{mn}T'_{mn} \quad (96)$$

テンソル表記をして一致するものであれば, マトリックスで表した時にも一致するはずであ

る. 確認のため成分をすべて書き下す. 局所の構成則と全体のひずみを局所に変換したものは,

$$\begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} \text{変換} \\ \text{マトリクス} \end{array} \right] \\ \left[ \text{仮想ひずみ } (6 \times 1) \right] \end{array} \begin{array}{c} (3 \times 6) \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} \text{局所の構成則} \\ \text{マトリクス} \end{array} \right] \\ (3 \times 3) \end{array} \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} \text{変換マトリクス} \end{array} \right] \\ (6 \times 3) \end{array} \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} \text{全} \\ \text{体} \\ \text{の} \\ \text{ひ} \\ \text{ず} \\ \text{み} \end{array} \right] \\ (1 \times 6) \end{array} \quad (97)$$

という形式になるが,

$$\begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} \text{変} \\ \text{換} \\ \text{マト} \\ \text{リクス} \end{array} \right] \\ (3 \times 6) \end{array} \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} \text{局所の構成則} \\ \text{マトリクス} \end{array} \right] \\ (3 \times 3) \end{array} \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} \text{変換マトリクス} \end{array} \right] \\ (6 \times 3) \end{array} \quad (98)$$

を先に計算して1つのマトリックスにすると

$$\left[ \begin{array}{c} \text{仮想ひずみ } (6 \times 1) \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} (6 \times 6) \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \text{全体のひずみ} \\ \\ \\ \\ \\ \\ (1 \times 6) \end{array} \right] \quad (99)$$

の形式になり, 全体座標系での構成則マトリックスと形は同じになる. 成分も同じになることを確認する.

式 (91) で定義した変換行列  $P$  を用い, 実際には書き下すと

$$\left[ \begin{array}{c} P \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{ccc} C'_{1111} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}C'_{1212} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}C'_{1313} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} P \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right] \quad (100)$$

となる. 式 (100) を計算した後の  $6 \times 6$  行列を次のように定義する.

$$\begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1131} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2231} \\ & & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3331} \\ & & & C_{1212} & C_{1223} & C_{1231} \\ & sym & & & C_{2323} & C_{2331} \\ & & & & & C_{3131} \end{bmatrix} \quad (101)$$

各成分を表示すると以下のようになり, 一致していることが確認できる.

$$\begin{aligned}
 C_{1111} &= C'_{1111}P_{11}P_{11}P_{11}P_{11} \\
 &\quad + 2C'_{1212}P_{11}P_{21}P_{11}P_{21} \\
 &\quad + 2C'_{1313}P_{31}P_{11}P_{31}P_{11}
 \end{aligned} \tag{102}$$

$$\begin{aligned}
 C_{1122} &= C'_{1111}P_{11}P_{11}P_{12}P_{12} \\
 &\quad + 2C'_{1212}P_{11}P_{21}P_{12}P_{22} \\
 &\quad + 2C'_{1313}P_{31}P_{11}P_{32}P_{12}
 \end{aligned} \tag{103}$$

$$\begin{aligned}
 C_{1133} &= C'_{1111}P_{11}P_{11}P_{13}P_{13} \\
 &\quad + 2C'_{1212}P_{11}P_{21}P_{13}P_{23} \\
 &\quad + 2C'_{1313}P_{31}P_{11}P_{33}P_{13}
 \end{aligned} \tag{104}$$

$$\begin{aligned}
 C_{1112} &= C'_{1111}P_{11}P_{11}P_{11}P_{12} \\
 &\quad + C'_{1212}P_{11}P_{21}(P_{11}P_{22} + P_{12}P_{21}) \\
 &\quad + C'_{1313}P_{31}P_{11}(P_{31}P_{12} + P_{32}P_{11})
 \end{aligned} \tag{105}$$

$$\begin{aligned}
 C_{1123} &= C'_{1111}P_{11}P_{11}P_{12}P_{13} \\
 &\quad + C'_{1212}P_{11}P_{21}(P_{12}P_{23} + P_{13}P_{22}) \\
 &\quad + C'_{1313}P_{31}P_{11}(P_{32}P_{13} + P_{33}P_{12})
 \end{aligned} \tag{106}$$

$$\begin{aligned}
 C_{1131} &= C'_{1111}P_{11}P_{11}P_{13}P_{11} \\
 &\quad + C'_{1212}P_{11}P_{21}(P_{13}P_{21} + P_{11}P_{23}) \\
 &\quad + C'_{1313}P_{31}P_{11}(P_{33}P_{11} + P_{31}P_{13})
 \end{aligned} \tag{107}$$

$$\begin{aligned}
C_{2222} &= C'_{1111} P_{12} P_{12} P_{12} P_{12} \\
&\quad + 2C'_{1212} P_{12} P_{22} P_{12} P_{22} \\
&\quad + 2C'_{1313} P_{32} P_{12} P_{32} P_{12}
\end{aligned} \tag{108}$$

$$\begin{aligned}
C_{2233} &= C'_{1111} P_{12} P_{12} P_{13} P_{13} \\
&\quad + 2C'_{1212} P_{12} P_{22} P_{13} P_{23} \\
&\quad + 2C'_{1313} P_{32} P_{12} P_{33} P_{13}
\end{aligned} \tag{109}$$

$$\begin{aligned}
C_{2212} &= C'_{1111} P_{12} P_{12} P_{11} P_{12} \\
&\quad + C'_{1212} P_{12} P_{22} (P_{11} P_{22} + P_{12} P_{21}) \\
&\quad + C'_{1313} P_{32} P_{12} (P_{31} P_{12} + P_{32} P_{11})
\end{aligned} \tag{110}$$

$$\begin{aligned}
C_{2223} &= C'_{1111} P_{12} P_{12} P_{12} P_{13} \\
&\quad + C'_{1212} P_{12} P_{22} (P_{12} P_{23} + P_{13} P_{22}) \\
&\quad + C'_{1313} P_{32} P_{12} (P_{32} P_{13} + P_{33} P_{12})
\end{aligned} \tag{111}$$

$$\begin{aligned}
C_{2231} &= C'_{1111} P_{12} P_{12} P_{13} P_{11} \\
&\quad + C'_{1212} P_{12} P_{22} (P_{13} P_{21} + P_{11} P_{23}) \\
&\quad + C'_{1313} P_{32} P_{12} (P_{33} P_{11} + P_{31} P_{13})
\end{aligned} \tag{112}$$

$$\begin{aligned}
C_{3333} &= C'_{1111} P_{13} P_{13} P_{13} P_{13} \\
&\quad + 2C'_{1212} P_{13} P_{23} P_{13} P_{23} \\
&\quad + 2C'_{1313} P_{33} P_{13} P_{33} P_{13}
\end{aligned} \tag{113}$$

$$\begin{aligned}
C_{3312} &= C'_{1111} P_{13} P_{13} P_{11} P_{12} \\
&\quad + C'_{1212} P_{13} P_{23} (P_{11} P_{22} + P_{12} P_{21}) \\
&\quad + C'_{1313} P_{33} P_{13} (P_{31} P_{12} + P_{32} P_{11})
\end{aligned} \tag{114}$$

$$\begin{aligned}
C_{3323} &= C'_{1111} P_{13} P_{13} P_{12} P_{13} \\
&\quad + C'_{1212} P_{13} P_{23} (P_{12} P_{23} + P_{13} P_{22}) \\
&\quad + C'_{1313} P_{33} P_{13} (P_{32} P_{13} + P_{33} P_{12})
\end{aligned} \tag{115}$$

$$\begin{aligned}
C_{3331} &= C'_{1111} P_{13} P_{13} P_{13} P_{11} \\
&\quad + C'_{1212} P_{13} P_{23} (P_{13} P_{21} + P_{11} P_{23}) \\
&\quad + C'_{1313} P_{33} P_{13} (P_{33} P_{11} + P_{31} P_{13})
\end{aligned} \tag{116}$$

$$\begin{aligned}
C_{1212} &= C'_{1111} P_{11} P_{12} P_{11} P_{12} \\
&+ \frac{1}{2} C'_{1212} (P_{11} P_{22} + P_{12} P_{21}) (P_{11} P_{22} + P_{12} P_{21}) \\
&+ \frac{1}{2} C'_{1313} (P_{31} P_{12} + P_{32} P_{11}) (P_{31} P_{12} + P_{32} P_{11})
\end{aligned} \tag{117}$$

$$\begin{aligned}
C_{1223} &= C'_{1111} P_{11} P_{12} P_{12} P_{13} \\
&+ \frac{1}{2} C'_{1212} (P_{11} P_{22} + P_{12} P_{21}) (P_{12} P_{23} + P_{13} P_{22}) \\
&+ \frac{1}{2} C'_{1313} (P_{31} P_{12} + P_{32} P_{11}) (P_{32} P_{13} + P_{33} P_{12})
\end{aligned} \tag{118}$$

$$\begin{aligned}
C_{1231} &= C'_{1111} P_{11} P_{12} P_{13} P_{11} \\
&+ \frac{1}{2} C'_{1212} (P_{11} P_{22} + P_{12} P_{21}) (P_{13} P_{21} + P_{11} P_{23}) \\
&+ \frac{1}{2} C'_{1313} (P_{31} P_{12} + P_{32} P_{11}) (P_{33} P_{11} + P_{31} P_{13})
\end{aligned} \tag{119}$$

$$\begin{aligned}
C_{2323} &= C'_{1111} P_{12} P_{13} P_{12} P_{13} \\
&+ \frac{1}{2} C'_{1212} (P_{12} P_{23} + P_{13} P_{22}) (P_{12} P_{23} + P_{13} P_{22}) \\
&+ \frac{1}{2} C'_{1313} (P_{31} P_{12} + P_{32} P_{11}) (P_{32} P_{13} + P_{33} P_{12})
\end{aligned} \tag{120}$$

$$\begin{aligned}
C_{2331} &= C'_{1111} P_{12} P_{13} P_{13} P_{11} \\
&+ \frac{1}{2} C'_{1212} (P_{12} P_{23} + P_{13} P_{22}) (P_{13} P_{21} + P_{11} P_{23}) \\
&+ \frac{1}{2} C'_{1313} (P_{32} P_{13} + P_{33} P_{12}) (P_{33} P_{11} + P_{31} P_{13})
\end{aligned} \tag{121}$$

$$\begin{aligned}
C_{3131} &= C'_{1111} P_{13} P_{11} P_{13} P_{11} \\
&+ \frac{1}{2} C'_{1212} (P_{13} P_{21} + P_{11} P_{23}) (P_{13} P_{21} + P_{11} P_{23}) \\
&+ \frac{1}{2} C'_{1313} (P_{33} P_{11} + P_{31} P_{13}) (P_{33} P_{11} + P_{31} P_{13})
\end{aligned} \tag{122}$$



## 局所座標系 $e'_i$

- 局所座標系の取り方は幾通りも考えられるが、ここでは、梁の形状は (i) 真直か (ii) 円弧の一部であるときのみを考慮し、局所座標系は、長手方向のアイソパラメトリック座標  $r_1$  に対し以下のように求められるベクトルを基底ベクトルとする.

$$V_2^{(n)} = N^{(n)}(r_1)V_2^{(n)} \quad (123)$$

$$V_3^{(n)} = N^{(n)}(r_1)V_3^{(n)} \quad (124)$$

$$V_1^{(n)} = V_2^{(n)} \times V_3^{(n)} \quad (125)$$

このとき座標変換マトリクスは以下のように表される.

$$P_{ij} = V_i^{(n)} \cdot e_j \quad (126)$$

具体的に成分で書くと以下のようなになる.

$$P_{11} = \mathbf{V}_1^{(n)} \cdot \mathbf{e}_1 = V_1^{(n)}(1) \quad (127)$$

$$P_{12} = \mathbf{V}_1^{(n)} \cdot \mathbf{e}_2 = V_1^{(n)}(2) \quad (128)$$

$$P_{13} = \mathbf{V}_1^{(n)} \cdot \mathbf{e}_3 = V_1^{(n)}(3) \quad (129)$$

$$P_{21} = \mathbf{V}_2^{(n)} \cdot \mathbf{e}_1 = V_2^{(n)}(1) \quad (130)$$

$$P_{22} = \mathbf{V}_2^{(n)} \cdot \mathbf{e}_2 = V_2^{(n)}(2) \quad (131)$$

$$P_{23} = \mathbf{V}_2^{(n)} \cdot \mathbf{e}_3 = V_2^{(n)}(3) \quad (132)$$

$$P_{31} = \mathbf{V}_3^{(n)} \cdot \mathbf{e}_1 = V_3^{(n)}(1) \quad (133)$$

$$P_{32} = \mathbf{V}_3^{(n)} \cdot \mathbf{e}_2 = V_3^{(n)}(2) \quad (134)$$

$$P_{33} = \mathbf{V}_3^{(n)} \cdot \mathbf{e}_3 = V_3^{(n)}(3) \quad (135)$$

$$(136)$$

## 円筒形断面の梁要素 1

- 長方形断面の梁要素と同様に時刻  $t$  で節点  $n$  の断面を張るベクトルを  ${}^t\mathbf{V}_2^{(n)}$ ,  ${}^t\mathbf{V}_3^{(n)}$ , また時刻  $t$  での節点  $n$  の位置ベクトルを  ${}^t\mathbf{x}$  とすると, 時刻  $t$  における要素内の任意の点における位置ベクトルは,

$${}^t\mathbf{x}(r_1, r_2, r_3) = N^{(n)}(r_1) \left( {}^t\mathbf{x}^n + \frac{\bar{a}}{2}r_2{}^t\mathbf{V}_2^{(n)} + \frac{\bar{a}}{2}r_3{}^t\mathbf{V}_3^{(n)} \right) \quad (137)$$

と, 表すことができる. これをもとに, 長方形断面の梁要素と同様に定式化を行なうことがで

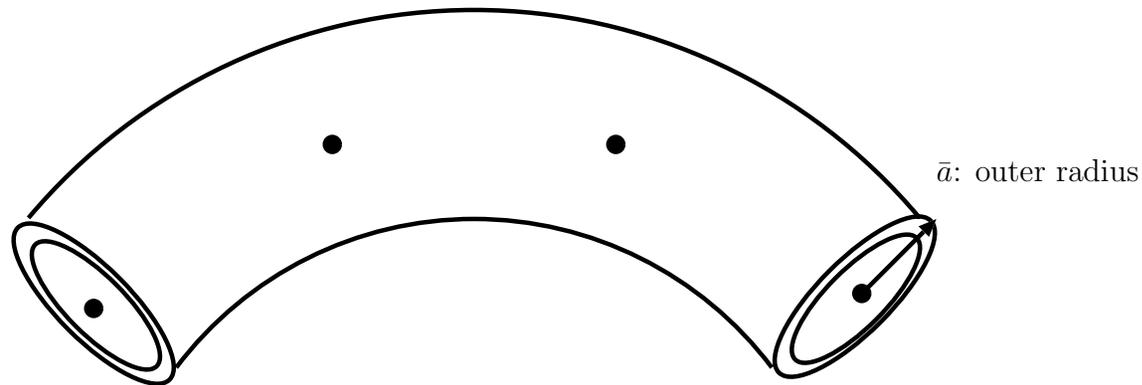


図 2: 円筒断面梁要素の半径の定義

きる.

## 円筒形断面の梁要素 2

- ${}^t x, u$  の全体座標系での成分を示せば以下のようなになる.

$$\begin{Bmatrix} {}^t x_1 \\ {}^t x_2 \\ {}^t x_3 \end{Bmatrix} = N^{(n)}(r_1) \begin{Bmatrix} {}^t x_1^{(n)} \\ {}^t x_2^{(n)} \\ {}^t x_3^{(n)} \end{Bmatrix} + \bar{a}r_2 N^{(n)}(r_1) \begin{Bmatrix} {}^t V_{21}^{(n)} \\ {}^t V_{22}^{(n)} \\ {}^t V_{23}^{(n)} \end{Bmatrix} + \bar{a}r_3 N^{(n)}(r_1) \begin{Bmatrix} {}^t V_{31}^{(n)} \\ {}^t V_{32}^{(n)} \\ {}^t V_{33}^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (138)$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = N^{(n)}(r_1) \begin{Bmatrix} u_1^{(n)} \\ u_2^{(n)} \\ u_3^{(n)} \end{Bmatrix} + \bar{a}r_2 N^{(n)}(r_1) \begin{bmatrix} 0 & {}^t V_{23}^{(n)} & -{}^t V_{22}^{(n)} \\ -{}^t V_{23}^{(n)} & 0 & {}^t V_{21}^{(n)} \\ {}^t V_{22}^{(n)} & -{}^t V_{21}^{(n)} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1^{(n)} \\ \theta_2^{(n)} \\ \theta_3^{(n)} \end{Bmatrix} \\ + \bar{a}r_3 N^{(n)}(r_1) \begin{bmatrix} 0 & {}^t V_{33}^{(n)} & -{}^t V_{32}^{(n)} \\ -{}^t V_{33}^{(n)} & 0 & {}^t V_{31}^{(n)} \\ {}^t V_{32}^{(n)} & -{}^t V_{31}^{(n)} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1^{(n)} \\ \theta_2^{(n)} \\ \theta_3^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (139)$$

- 後の計算は長方形断面の場合と同じ

# 構成則マトリックス

- 構成則マトリックスは前節で述べた方法で作ることができる。ただし局所座標系は、要素長手方向、肉厚方向、円周方向とし、それぞれ  $S_1, S_2, S_3$  とする。

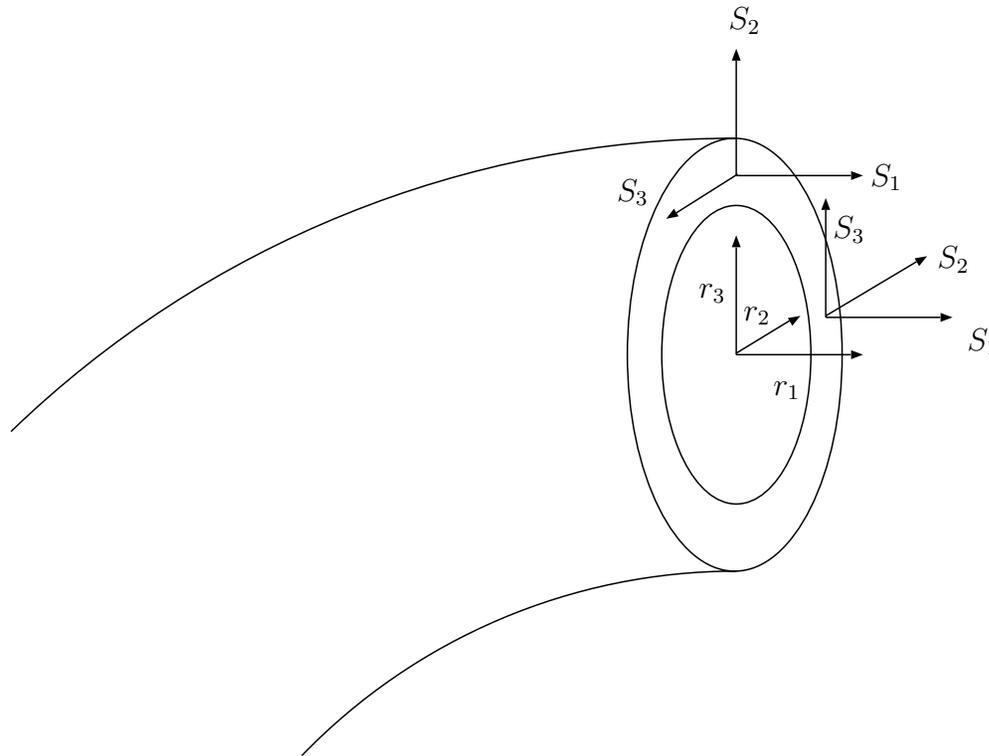


図 3: 円筒断面配管要素座標系の定義

局所座標系の基底ベクトル  $W_1, W_2, W_3$  は図を参照し、長方形断面の場合の基底ベクトルを

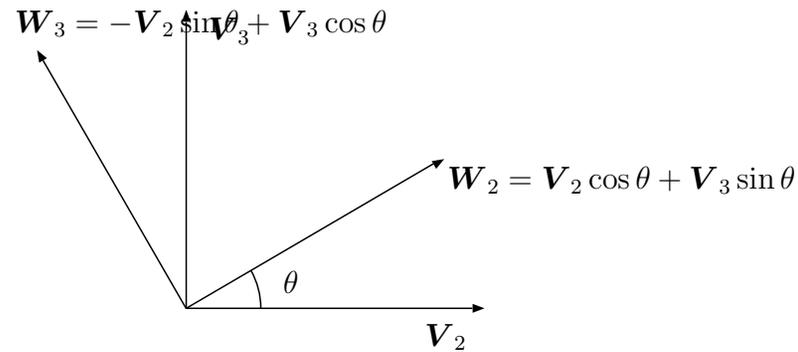


図 4: 円筒断面配管要素の座標系関係

回転することにより次のように表される.

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{V}_1^{(n)} \quad (140)$$

$$\mathbf{W}_2 = \mathbf{V}_2^{(n)} \cos \theta + \mathbf{V}_3^{(n)} \sin \theta \quad (141)$$

$$\mathbf{W}_3 = -\mathbf{V}_2^{(n)} \sin \theta + \mathbf{V}_3^{(n)} \cos \theta \quad (142)$$

このとき座標変換マトリックスは以下のように表される.

$$P_{ij} = \mathbf{W}_i \cdot \mathbf{e}_j \quad (143)$$

具体的に成分で書くと以下のようなになる.

$$P_{11} = W_1 \cdot E_1 = W_1(1) \quad (144)$$

$$P_{12} = W_1 \cdot E_2 = W_1(2) \quad (145)$$

$$P_{13} = W_1 \cdot E_3 = W_1(3) \quad (146)$$

$$P_{21} = W_2 \cdot E_1 = W_2(1) \quad (147)$$

$$P_{22} = W_2 \cdot E_2 = W_2(2) \quad (148)$$

$$P_{23} = W_2 \cdot E_3 = W_2(3) \quad (149)$$

$$P_{31} = W_3 \cdot E_1 = W_3(1) \quad (150)$$

$$P_{32} = W_3 \cdot E_2 = W_3(2) \quad (151)$$

$$P_{33} = W_3 \cdot E_3 = W_3(3) \quad (152)$$

## 円筒領域の数値積分

- 円筒要素の場合, 断面内数値積分を合理的に行なうために以下のように  $r_2, r_3$  を座標表示するのが便利である.

$$I = \int_{-1}^1 \int_{\left(\frac{a-t}{a}\right)^2 \leq r_2^2 + r_3^2 \leq 1} dr_2 dr_3 dr_1 \quad (153)$$

ここで,

$$r_2 = r \cos \theta \quad (154)$$

$$r_3 = r \sin \theta \quad (155)$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_2}{\partial r} & \frac{\partial r_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial r_3}{\partial r} & \frac{\partial r_3}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} \quad (156)$$

$$\det J = r \quad (157)$$

により, 式 (153) の積分は以下のようにできる.

$$I = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{a-t}{a}}^1 r dr d\theta dr_1 \quad (158)$$

$$= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \pi \frac{t}{2a} \left( \frac{t}{2a} x + \frac{2a-t}{2a} \right) dx dy dr_1 \quad (159)$$

通常  $r$  方向は, Gauss 積分あるいは Simpson 積分,  $\theta$  方向は台形則を用いて積分する.

## シェル要素の定式化

- シェル要素の開発は過去多くの研究者により行われてきたが、現在も高精度、高信頼性かつ計算効率のよい要素を目指して開発が続けられている。優れたシェル要素の条件は、
  - 薄肉、厚肉双方のシェルに適用できる（薄肉シェル要素においてもロッキングが生じない）。
  - 任意の形状のシェルを取り扱える。
  - 剛体モード以外の虚偽のゼロ固有値を持たない。
  - 要素のゆがみに対して解の精度が損なわれない。
  - 要素内の任意の点においてゼロを含む一定ひずみを表現できる。

などが挙げられる。これらを考慮すると、Batheら [?] が 1984 年以降に発表した MITC (Mixed Interpolation of Tensorial Components) 要素が理論の明解さ、定式化の容易さの点で最も優れている。

## 幾何学的非線形シェル要素の基礎式

- Bathe らの MITC 要素の概要を示す [?] [?]. この要素の特徴は,
  1. アイソパラメトリック degenerated シェル要素である.
  2. 面外せん断ひずみに関しては, あるサンプリング点の面外せん断ひずみの値から内挿するように再定義する.
  3. ひずみ成分および応力成分には, 自然座標系での共変成分, 反変成分を使用する.

などが挙げられる. 上記の 2, 3 が Mixed Interpolation of Tensorial Components 要素と呼ばれる理由であり, Assumed-Strain 要素と参照されている場合もある.

## 形状および変位補間式

- 図に時刻 0 におけるシェル要素の形状を示す。以下、特に記載のない場合には図中の記号で説明をおこなう。図 5 より時刻 0 における要素内の任意の点の位置ベクトル  $\mathbf{X}$  は形状関数  $N(r^1, r^2)$  を用いて、

$$\mathbf{X} = \sum_{n=1}^4 N^n(r^1, r^2) \mathbf{X}^n + \frac{a}{2} r^3 \sum_{n=1}^4 N^n(r^1, r^2) {}^0\mathbf{V}_3^n \quad (160)$$

で表される。式(160)で  ${}^0\mathbf{V}_3^k$  はシェルの厚み方向を示すベクトル(以下、ディレクター。左肩の添字は時刻を表す)であり、解析面に対する法線として一節点にただひとつ定義され、その節点を有する要素間で共有される。

ここでシェルの変形に関して次の 2 つの仮定を設ける。

1. 各節点におけるディレクター(時刻 0 において直線を仮定した)は、変形の間も直線を保つが、必ずしも中立面に垂直である必要はない(面外せん断変形を許す)。
2. シェルの肉厚  $a$  は変形の間も変化しない(大ひずみ領域は取り扱わない)。

このとき時刻  $t$  における要素内の任意の点  ${}^t\mathbf{x}$  の位置ベクトルは、

$${}^t\mathbf{x} = \sum_{n=1}^4 N^n(r^1, r^2) {}^t\mathbf{x}^n + \frac{a}{2} r^3 \sum_{n=1}^4 N^n(r^1, r^2) {}^t\mathbf{V}_3^n \quad (161)$$

となる。したがって、時刻  $t$  における変位  ${}^t\mathbf{u}$ 、時刻  $t$  から  $t'$  ( $= t + \Delta t$ ) までの変位増分  $\mathbf{u}$  はそれぞれ  ${}^t\mathbf{u} = {}^t\mathbf{x} - \mathbf{X}$ 、 $\mathbf{u} = {}^{t'}\mathbf{x} - {}^t\mathbf{x}$  であるから、

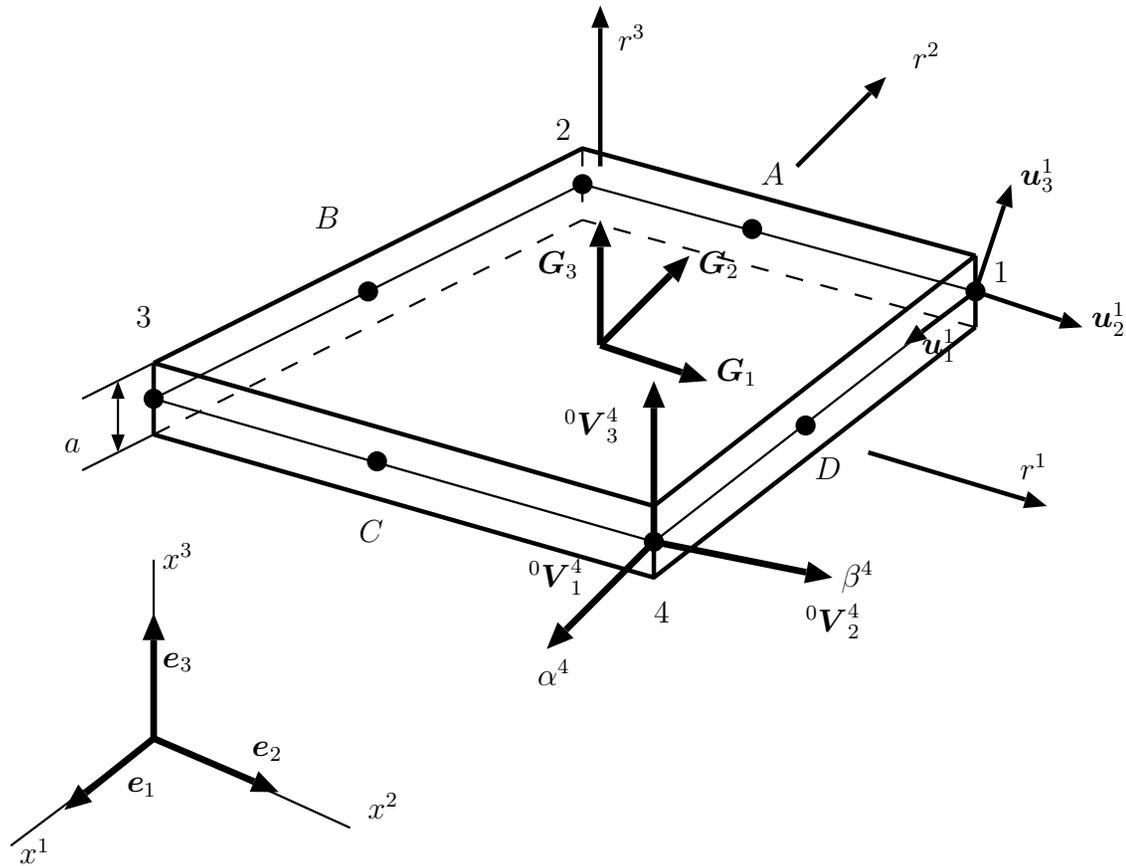
$${}^t\mathbf{u} = \sum_{n=1}^4 N^n(r^1, r^2) {}^t\mathbf{U}^n + \frac{a}{2} r^3 \sum_{n=1}^4 N^n(r^1, r^2) ({}^t\mathbf{V}_3^n - {}^0\mathbf{V}_3^n) \quad (162)$$

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^4 N^n(r^1, r^2) \mathbf{U}^n + \frac{a}{2} r^3 \sum_{n=1}^4 N^n(r^1, r^2) ({}^{t'}\mathbf{V}_3^n - {}^t\mathbf{V}_3^n) \quad (163)$$

となる。ここで、各節点のシェルディレクターの時刻  $t$  から  $t'$  までの有限回転を表すテンソルを  ${}^t_t\mathbf{R}$  とすると、 ${}^{t'}\mathbf{V}_3^k = {}^t_t\mathbf{R} {}^t\mathbf{V}_3^k$  であるから式 (163) はつぎのように書き直される。

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^4 N^n(r^1, r^2) \mathbf{U}^n + \frac{a}{2} r^3 \sum_{n=1}^4 N^n(r^1, r^2) ({}^t_t\mathbf{R} - \mathbf{I}) {}^t\mathbf{V}_3^n \quad (164)$$

( $\mathbf{I}$  は単位テンソル)



- a shell thickness
- $x^i$  Cartesian coordinates
- $e^i$  orthonormal base vector in global coordinate system
- $r^i$  natural coordinates ( $-1 \leq r^i \leq 1$ )
- $G_i$  covariant base vector of natural coordinate  $r^i$
- $V_i^k$  orthonormal base vector in local coordinate system at node k
- $V_3^k$  shell director vector
- $u^k$  displacement vector at node k
- $\alpha^k, \beta^k$  rotations of the director vector about  $V_1^k$  and  $V_2^k$

図 5: 4 節点アイソパラメトリックシェル要素

## 面外せん断ひずみ成分補間式

- 通常のアソパラメトリック要素では、要素内任意点のひずみ、ひずみ増分は式(162)、(163)で表せる変位、変位増分の空間微分をとることにより直接求められるが、MITC 要素では、面外せん断ひずみの成分についてのみ、あるサンプリング点における面外せん断ひずみ (通常の方法から求める) から内挿関数を再定義して求める。図 6 にサンプリング点位置 (点 A ~ D) を、式(165)に面外せん断ひずみ成分の補間式を示す。

$$E_{13} = \frac{1}{2}(1 + r^2)E_{13}^A + \frac{1}{2}(1 - r^2)E_{13}^C \quad (165)$$

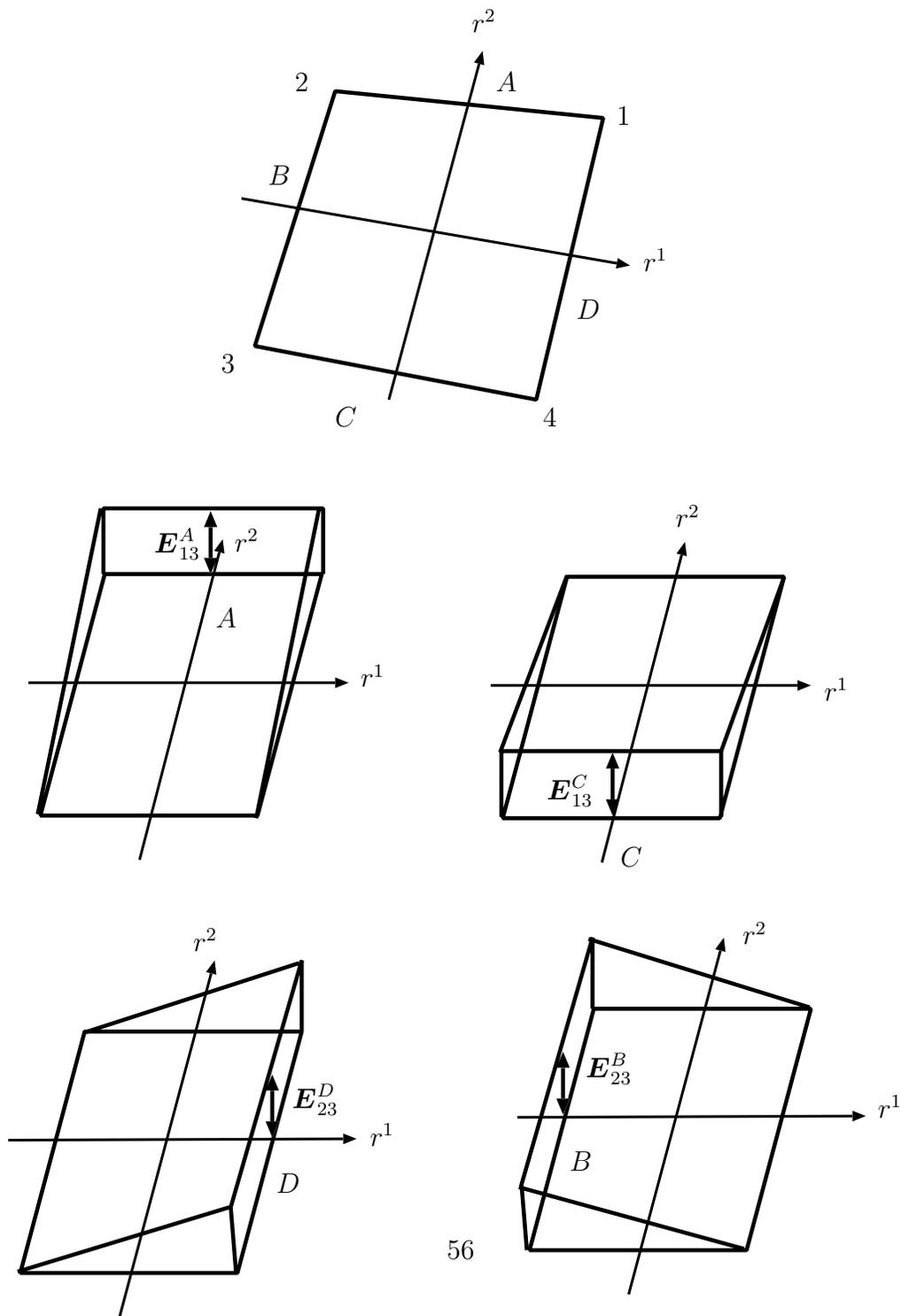
$$E_{23} = \frac{1}{2}(1 + r^1)E_{23}^D + \frac{1}{2}(1 - r^1)E_{23}^B \quad (166)$$

ここで、

$E_{13}, E_{23}$  : 要素内の任意点のせん断ひずみ

$E^{A \sim D}$  : サンプリング点におけるせん断ひずみ

である。



56

図 6: 面外せん断ひずみのサンプリング点

# 仮想仕事式の増分分解

- Total-Lagrange 法に基づく仮想仕事の原理は

$$\int_V {}_0^t \mathbf{S} : \delta {}_0^t \mathbf{E} \, dV \equiv \int_V {}_0^t S^{ij} \delta {}_0^t E_{ij} \, dV = {}^t \delta R \quad (167)$$

で表される [?]. ここで,

- ${}_0^t \mathbf{S}$  : 時刻 0 を基準配置とする時刻  $t'$  における第 2 Piola-Kirchhoff 応力テンソル
- ${}_0^t S^{ij}$  :  ${}_0^t \mathbf{S}$  の反変成分, すなわち  ${}_0^t \mathbf{S} = {}_0^t S^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j$
- ${}_0^t \mathbf{E}$  : 時刻 0 を基準配置とする時刻  $t'$  における Green-Lagrange ひずみテンソル
- ${}_0^t E_{ij}$  :  ${}_0^t \mathbf{E}$  の共変成分, すなわち  ${}_0^t \mathbf{E} = {}_0^t E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j$
- ${}^t \delta R$  : 外力による仮想仕事
- $\mathbf{G}_i, \mathbf{G}^j$  : 時刻 0 における共変および反変基底ベクトル

とする. ただし,  $\delta$  は変分,  $\otimes$  はテンソル積を表す. 式 (167) の仮想仕事式を増分分解するために, 応力, ひずみ成分変分を時刻  $t$  での成分 (既知項) と  $t' - t = \Delta t$  における増分 (未知項) に分解する.

$${}_0^t S^{ij} = {}_0^t S^{ij} + {}_0 S^{ij} \quad (168)$$

$$\begin{aligned} \delta {}_0^t E_{ij} &= \delta ({}_0^t E_{ij} + {}_0 E_{ij}) \\ &= \delta {}_0 E_{ij} \end{aligned} \quad (169)$$

$$= \delta {}_0 E_{Lij} + \delta {}_0 E_{NLij} \quad (170)$$

ここで式 (168), (170) を式 (167) に代入し既知項を右辺に移すと,

$$\int_V {}_0S^{ij}\delta_0E_{ij}dV + \int_V {}^t_0S^{ij}\delta_0E_{NLij}dV = {}^tR - \int_V {}^t_0S^{ij}\delta_0E_{Lij}dV \quad (171)$$

が得られる. 式 (171) の左辺の線形化 ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) をおこない, ひずみが微小であるとの前提のもとに  ${}^t_0\dot{S}^{ij} = {}_0C^{ijkl}{}_0\dot{E}_{kl}$  の形の構成則を導入すると,

$$\text{式(171)左辺} = \int_V {}_0C^{ijkl}{}_0\dot{E}_{Lkl}\delta_0E_{Lij}dV + \int_V {}^t_0S^{ij}(\delta_0E_{NLij})'dV \quad (172)$$

を得, これより接線剛性マトリックスが求められる.

次に, 時刻 0 を基準配置とする時刻  $t'$  における Green-Lagrange ひずみテンソル  ${}^t'_0E$  は定義により,

$${}^t'_0E = \frac{1}{2}({}^t'_0\mathbf{g}_i \cdot {}^t'_0\mathbf{g}_j - \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j)\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (173)$$

であるから, Green-Lagrange ひずみテンソル増分  ${}_0E$  は,

$${}_0E = \frac{1}{2}({}^t'_0\mathbf{g}_i \cdot {}^t'_0\mathbf{g}_j - {}^t_0\mathbf{g}_i \cdot {}^t_0\mathbf{g}_j)\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (174)$$

となる. ここで,  $\mathbf{G}_i, {}^t_0\mathbf{g}_i, {}^t'_0\mathbf{g}_j$  はそれぞれ自然 (埋め込み) 座標系における時刻 0,  $t, t'$  での共変基底ベクトルである. したがって定義により,

$$\begin{aligned} {}^t'_0\mathbf{g}_i &= \frac{\partial {}^t'\mathbf{x}}{\partial r^i} = \frac{\partial ({}^t\mathbf{x} + \mathbf{u})}{\partial r^i} \\ &= {}^t_0\mathbf{g}_i + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r^i} \end{aligned} \quad (175)$$

であるから, 式(175)を式(174)に代入してさらに線形部と非線形部に分けると  ${}_0\dot{E}_{Lij}$ ,  $\delta_0 E_{Lij}$ ,  $(\delta_0 E_{NLij})'$  はそれぞれ

$${}_0\dot{E}_{Lij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial {}^t \dot{\mathbf{u}}}{\partial r^i} \cdot {}^t \mathbf{g}_j + {}^t \mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial {}^t \dot{\mathbf{u}}}{\partial r^j} \right) \quad (176)$$

$$\delta_0 E_{Lij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial r^i} \cdot {}^t \mathbf{g}_j + {}^t \mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial r^j} \right) \quad (177)$$

$$(\delta_0 E_{NLij})' = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial r^i} \cdot \frac{\partial {}^t \dot{\mathbf{u}}}{\partial r^j} + \frac{\partial {}^t \dot{\mathbf{u}}}{\partial r^i} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial r^j} \right) \quad (178)$$

のように求められる. 式(164)を代入した式(176)~(178)および  ${}^t S^{ij}$ ,  ${}_0 C^{ijkl}$  の値により具体的に式(172)が計算できる.

# 有限回転テンソルの導入

- 有限要素法に有限回転を導入する方法としては、現在まで

1. オイラー角の導入
2. 軸性ベクトルによる有限回転テンソルの導入

の2つの方法が主として用いられている。Degenerated シェル要素に対して古典的なオイラー角を導入する方法は、過去に Surana, Stander が応用しているが、

1. オイラー角の値からは直観的に幾何学的な位置関係が把握できない。
2. 基準とする座標軸のとり方によって解が影響を受ける。
3. マトリックスの対称性が損なわれる危険性がある。
4. 三角関数の演算が増えて定式化が複雑になる。
5. 90度以上の大回転は取り扱いえない。

などの問題点があり、あまり好ましくないとされている。

一方、Argyris により提案された軸性ベクトルにより有限回転テンソルを求める方法は、シェルの場合、ディレクターの回転を定義することにほかならないが、

1. 幾何学的な意味が明瞭である。
2. 回転角の更新は角度増分の和ではなく、シェルのディレクターに回転テンソルを作用させることによっておこなう。

3. 初期形状に対する回転テンソルを求める場合には, すべての節点における回転テンソルを保存しなければならない (記憶すべき情報量が多くなる).
4. 180 度以上の回転増分に対しては取り扱いが複雑になる.

などの指摘がある. 上記項目中の短所である 3, 4 に関しては, 時刻  $t$  から時刻  $t' (= t + \Delta t)$  までの増分解を求める有限要素法では, 必ずしも初期形状に対する回転テンソルを求める必要はなく, またステップ間での回転角の増分が 180 度を越えることは非現実的であるため, 特に問題点になるとは考えられない. 以上の理由により, 有限要素法においては軸性ベクトルを用いて有限回転を定義する方が望ましい.

Parish は Bathe らの MITC 要素に軸性ベクトルを導入して, 有限回転 (増分) を考慮したシェル要素を開発している. この要素の信頼性は文献の示すところであるが, 筆者自身が述べているように,

1. 軸性ベクトルが常に 3 自由度を有するため, 元来 5 自由度のシェル要素が 1 自由度分の singularity を有し, 全体の自由度数も増える.
2. 完全な形の回転テンソルの変分を直接とるために接線剛性の定式化が三角関数の計算を含み, より複雑なものとなる. また, Bathe らによる標準的な定式化との関わり合いが不明確である.

の 2 点で効率性を欠いている. 本項では,

1. ある時間増分における有限回転を表すテンソルを増分間での軸性ベクトルは一定であると仮定し,

2. 一種のスピンテンソルを用いてテイラー展開をおこない,

その2次項までを考慮することによって singularity を回避しながら効率よく有限回転テンソルを取り扱えることを示す.

## 軸性ベクトルおよび有限回転テンソル

- シェルのディレクター  ${}^tV_3^k$  の時刻  $t'$  までの有限回転に関して、回転の間は回転軸は変化しないものと仮定する。また回転軸を表すベクトル(軸性ベクトル)を  ${}^{t'}\theta^k$  , その大きさ  $\omega$  が有限回転角を表すものとする。このとき、

$${}^{t'}\theta^k = {}^{t'}\theta_i^k e_i \quad (179)$$

$$\omega = \left| {}^{t'}\theta^k \right| \quad (180)$$

と書くことができる。次に、軸性ベクトルの成分を用いて反対称マトリックス

$${}^{t'}\Theta^k = \begin{bmatrix} 0 & -{}^{t'}\theta_3^k & {}^{t'}\theta_2^k \\ {}^{t'}\theta_3^k & 0 & -{}^{t'}\theta_1^k \\ -{}^{t'}\theta_2^k & {}^{t'}\theta_1^k & 0 \end{bmatrix} \quad (181)$$

を定義する。式 (181), (179) を  $\Delta t = t' - t$  で割ったものが、いわゆるスピテンソルとその軸性ベクトルとなり、

$$\frac{1}{\Delta t} {}^{t'}\Theta^k {}^tV_3^k = \frac{1}{\Delta t} {}^{t'}\theta^k \times {}^tV_3^k = {}^t\dot{V}_3^k \quad (182)$$

の関係がある。したがって式 (182) より、 $I$  を単位テンソルとすれば、 $I + (1/n){}^{t'}\Theta^k$  は  $\omega/n$  を回転角とする、 $\Delta t/n$  の間の微小回転テンソルを表している。有限回転は無数の微小回転の集まりと考えることができるから、前項で定義した有限回転テンソル  ${}^tR$  は次式のように表す

ことができる.

$$\begin{aligned} {}^t_t \mathbf{R} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \mathbf{I} + \frac{1}{n} {}^t_t \boldsymbol{\Theta}^k \right)^n \\ &= \mathbf{I} + {}^t_t \boldsymbol{\Theta}^k + \frac{1}{2!} ({}^t_t \boldsymbol{\Theta}^k)^2 + \frac{1}{3!} ({}^t_t \boldsymbol{\Theta}^k)^3 + \dots \end{aligned} \quad (183)$$

一方, 有限回転テンソル  ${}^t_t \mathbf{R}$  は, Argyris によって幾何学的関係から厳密に求められており,

$${}^t_t \mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{\sin \omega}{\omega} {}^t_t \boldsymbol{\Theta}^k + \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right)^2 ({}^t_t \boldsymbol{\Theta}^k)^2 \quad (184)$$

となる.  $\omega$  が微小の場合  $\sin \omega, \sin(\omega/2)$  をテイラー展開すれば,

$$\begin{aligned} {}^t_t \mathbf{R} &= \mathbf{I} + \left( 1 - \frac{\omega^2}{3!} + \frac{\omega^4}{5!} + \dots + (-1)^m \frac{\omega^{2m}}{(2m+1)!} \pm \dots \right) {}^t_t \boldsymbol{\Theta}^k \\ &\quad + \left( \frac{1}{2!} - \frac{\omega^2}{4!} + \frac{\omega^4}{6!} + \dots + (-1)^m \frac{\omega^{2m}}{(2m+2)!} \pm \dots \right) ({}^t_t \boldsymbol{\Theta}^k)^2 \end{aligned} \quad (185)$$

となる. ここで,  ${}^t_t \boldsymbol{\Theta}^k$  と  $\omega$  の間には,

$$\left( {}^t_t \boldsymbol{\Theta}^k \right)^{2m-1} = (-1)^{m-1} \omega^{2(m-1)} {}^t_t \boldsymbol{\Theta}^k \quad (186)$$

$$\left( {}^t_t \boldsymbol{\Theta}^k \right)^{2m} = (-1)^{m-1} \omega^{2(m-1)} \left( {}^t_t \boldsymbol{\Theta}^k \right)^2 \quad (187)$$

の関係があるので, 式(186), (187)を式(185)に代入すれば式(183)が得られ, 式(184)が式(183)と同等であることがわかる.

本研究における有限要素法定式化では、接線剛性マトリックスを導く際には式(183)を、内力(等価節点ベクトル)を計算する際には式(184)を用いて厳密にディレクターの更新をおこなう。

## 幾何学的非線形シェル要素への応用

- 式 (183) で得られた  ${}^t_t R$  を式 (164) に代入すると、シェル要素における変位ベクトルの離散形が得られる。同種の方法を Dvorkin らはビーム要素に適用しているが、ビーム要素が回転 3 自由度であるのに対し、シェル要素の場合はディレクターまわりの回転を考慮しないために回転 2 自由度である。したがってベクトル  ${}^t_t \theta^k$  の 3 成分を未知数にすると、回転 1 自由度分の singularity を有する要素となる。本研究では以上のことを考慮し、「軸性ベクトルはシェルのディレクターに直交する面内の任意の 2 つのベクトルによってのみ分解される」と定義することによって singularity を回避する。

任意の 2 つのベクトルを、 ${}^t V_1^k$  および  ${}^t V_2^k$  を選ぶと  ${}^t_t \theta^k$  は、

$${}^t_t \theta = \alpha^k {}^t V_1^k + \beta^k {}^t V_2^k \quad (188)$$

となる。この場合、 ${}^t_t R$  は  ${}^t_t \theta^k$  のまわりの  $\sqrt{(\alpha^k)^2 + (\beta^k)^2}$  だけの有限回転を表している。回転が微小な時には、ディレクター  ${}^t V_3^k$  の  ${}^t V_1^k, {}^t V_2^k$  のまわりの回転角をそれぞれ  $\alpha^k, \beta^k$  とみなすことができ、ディレクター自身のまわりの回転は考慮されていない。

次に式 (183), (182), (188) より (164) の  ${}^t_t R$  を消去する。接線剛性を求めるためには式 (183) で

テイラー展開の2次の項まで考慮すれば十分であるので, 結局次式を得る.

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \sum_{n=1}^4 N^n(r^1, r^2) \mathbf{U}^n + \frac{a}{2} r^3 \sum_{n=1}^4 N^n(r^1, r^2) {}_t' \boldsymbol{\theta}^n {}^t \mathbf{V}_3^n \\
&\quad + \frac{a}{2} r^3 \sum_{n=1}^4 N^n(r^1, r^2) \frac{1}{2!} ({}_t' \boldsymbol{\theta}^n)^2 {}^t \mathbf{V}_3^n \\
&= \sum_{n=1}^4 N^n(r^1, r^2) \mathbf{U}^n + \frac{a}{2} r^3 \sum_{n=1}^4 N^n(r^1, r^2) ({}_t' \boldsymbol{\theta}^n \times {}^t \mathbf{V}_3^n) \\
&\quad + \frac{a}{2} r^3 \sum_{k=1}^4 N^n(r^1, r^2) \frac{1}{2!} \left\{ {}_t' \boldsymbol{\theta}^n \times ({}_t' \boldsymbol{\theta}^n \times {}^t \mathbf{V}_3^n) \right\} \\
&= \sum_{n=1}^4 N^n(r^1, r^2) \mathbf{U}^n + \frac{a}{2} r^3 \sum_{n=1}^4 N^n(r^1, r^2) (-{}^t \mathbf{V}_2^n \alpha^n + {}^t \mathbf{V}_1^n \beta^n) \\
&\quad + \frac{a}{2} r^3 \sum_{n=1}^4 N^n(r^1, r^2) \frac{-1}{2!} \left\{ (\alpha^n)^2 + (\beta^n)^2 \right\} {}^t \mathbf{V}_3^n \tag{189}
\end{aligned}$$

式(189)最右辺の第1, 2項を  $u_s$ , 第3項を  $u_{ex}$  とすると  $u_s$  は通常の degenerated シェル要素の式であり,  $u_{ex}$  が有限回転寄与項となる.

なお, 平面や連続曲面あるいは複数の面の交差角が小さい場合は, 式(189)のような回転2自由度の定式化が可能であるが, 交差角が大きい場合やビーム要素が結合する場合は, 要素ごとに節点でのディレクターを定義する必要がある. この場合は, 両要素に共通の基底ベクトルで

${}^t_t \theta^k$  を分解して回転 3 自由度とすることで対応できるが, 式(189)のような簡潔な表記とはならない. しかしながら実際のプログラミングでは, 式(189)に基づく回転 2 自由度シェル要素の剛性マトリックスを作った後, 次式に基づく座標変換を各節点に対しおこなうことで回転 3 自由度シェル要素の剛性マトリックスを得ることができる. 式(188)において  ${}^t_t \Theta^k, {}^t \mathbf{V}_1^k$  および  ${}^t \mathbf{V}_2^k$  を全体座標系における直交基底ベクトルで成分分解すると次式を得る ( $(( )_k$  は, 直交基底ベクトルで分解した成分を表す).

$$\begin{pmatrix} {}^t_t \theta_1^k \\ {}^t_t \theta_2^k \\ {}^t_t \theta_3^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ({}^t \mathbf{V}_1^k)_1 & ({}^t \mathbf{V}_2^k)_1 \\ ({}^t \mathbf{V}_1^k)_2 & ({}^t \mathbf{V}_2^k)_2 \\ ({}^t \mathbf{V}_1^k)_3 & ({}^t \mathbf{V}_2^k)_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^k \\ \beta^k \end{pmatrix} \quad (190)$$

よって,

$$\begin{pmatrix} \alpha^k \\ \beta^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ({}^t \mathbf{V}_1^k)_1 & ({}^t \mathbf{V}_1^k)_2 & ({}^t \mathbf{V}_1^k)_3 \\ ({}^t \mathbf{V}_2^k)_1 & ({}^t \mathbf{V}_2^k)_2 & ({}^t \mathbf{V}_2^k)_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t_t \theta_1^k \\ {}^t_t \theta_2^k \\ {}^t_t \theta_3^k \end{pmatrix} \quad (191)$$

となる. 回転 2 自由度を有する剛性マトリックスに対して式(191)を各節点の回転自由度に作用させることにより, 回転 3 自由度を有する剛性マトリックスを得ることができる.

## 接線剛性マトリックスの作成

- 式 (189) の  $u$  を式 (175) に代入し, 変位の 2 次の項まで考慮して<sup>1</sup> 式 (174) の Green-Lagrange ひずみ増分を線形部と非線形部に分けると次式のようになる.

$${}_0\dot{E}_{Lij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^t \dot{\mathbf{u}}_s}{\partial r^i} \cdot {}^t \mathbf{g}_j + {}^t \mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial^t \dot{\mathbf{u}}_s}{\partial r^j} \right) \quad (192)$$

$$\delta_0 E_{Lij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta \mathbf{u}_s}{\partial r^i} \cdot {}^t \mathbf{g}_j + {}^t \mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}_s}{\partial r^j} \right) \quad (193)$$

$$\begin{aligned} (\delta_0 E_{NLij})' &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta \mathbf{u}_s}{\partial r^i} \cdot \frac{\partial^t \dot{\mathbf{u}}_s}{\partial r^j} + \frac{\partial^t \dot{\mathbf{u}}_s}{\partial r^i} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{u}_s}{\partial r^j} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial (\delta \mathbf{u}_{ex})'}{\partial r^i} \cdot {}^t \mathbf{g}_j + {}^t \mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial (\delta \mathbf{u}_{ex})'}{\partial r^j} \right) \end{aligned} \quad (194)$$

前式からひずみ・変位マトリックス, いわゆる  $B$  マトリックスが得られる. 式 (176) ~ (178) と式 (192) ~ (194) を比較すると,

1. 式 (172) から求められる接線剛性マトリックス  $K$  の第 1 項  $K_L$  は回転を微小として取り扱う標準的な degenerated シェル要素の  $K_L$  と一致し,
  2. 第 2 項  $K_{NL}$  は標準的な形 ( $K_{NL,s}$ ) に有限回転項 ( $K_{NL,ex}$ ) を付加したものになる
- ことがわかる. すなわち標準的な  $K$  を  $K_s$  とすると,

$$K = K_s + K_{NL,ex} \quad (195)$$

<sup>1</sup>変位の 3 次以上の項は接線剛性を導く線形化の際に消滅するため考慮する必要はない.

と書くことができる。また,

$$(\delta \mathbf{u}_{ex}) \cdot = -\frac{a}{2} r^3 \sum_{n=1}^4 N^n(r^1, r^2) (\delta \alpha^{n t} \dot{\alpha}^n + \delta \beta^{n t} \dot{\beta}^k)^t \mathbf{V}_3^n \quad (196)$$

であるから, 有限回転を取り扱うことにより加えられる項は回転自由度の対角項のみとなる。

したがって標準的なシェルの剛性マトリックスがすでに得られていれば, 式(192) ~ (196)により容易に有限回転を考慮した剛性マトリックスを作成することができる。

なお, 接線剛性マトリックスの計算の詳細は付録 ?? に示した。

## 構成則の変換

- 式 (172) では構成則テンソル  $C$  の反変成分  ${}_0C^{ijkl}$  が用いられているが、これはシェルの局所直交座標系におけるテンソル成分  $\tilde{C}_{mnop}$  より次のように求めることができる。すなわち、

$$\begin{aligned} {}_0C &= {}_0C^{ijkl} G_i \otimes G_j \otimes G_k \otimes G_l \\ &= {}_0\tilde{C}_{mnop} \tilde{e}_m \otimes \tilde{e}_n \otimes \tilde{e}_o \otimes \tilde{e}_p \end{aligned} \quad (197)$$

より、次式が得られる。

$${}_0C^{ijkl} = {}_0\tilde{C}_{mnop} (G^i \cdot \tilde{e}_m) (G^j \cdot \tilde{e}_n) (G^k \cdot \tilde{e}_o) (G^l \cdot \tilde{e}_p) \quad (198)$$

ただし  $\tilde{e}_m$  はシェルの局所座標系における単位直交基底ベクトルとする。弾性解析をおこなう場合は、ひずみが微小であると前提のもとに  ${}_0\tilde{C}_{mnop}$  は近似的に直交座標系での Hooke 則のそれと等置できる。なお通常のシェルの仮定に従い、面内は平面応力状態を仮定する。