

非線形有限要素法特論

2004 年 11 月 29 日

非線形有限要素法特論

- 講義内容は、非線形有限要素法の解説
- 夏学期の「非線形有限要素法の基礎」を受講していることが望まれる。
- 受講していない場合は、「非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎」久田俊明著、丸善を読んで理解しておくこと。
- 講義資料は<http://www.sml.k.u-tokyo.ac.jp/members/nabe/lecture2004> からダウンロードできるようにします。講義前日までに確定しますので各自プリントアウトして持参してください。
- <http://www.sml.k.u-tokyo.ac.jp/members/nabe/lecture2003> から昨年度の講義ノートがダウンロードできます。講義名が「有限要素法特論」ですが、基本的に同じ内容です。
- 今年度（2004）から新設した演習は、翌週の講義時間に提出してください。必須ではありませんし、採点しませんが、実際に手を動かして計算することは有限要素法の理解を深める上で重要です。
- 質問などは、nabe@sml.k.u-tokyo.ac.jp まで。

非線形有限要素法特論講義予定

1.	10/ 4	微分方程式の境界値問題の有限要素解析
2.	10/18	線形弾性体の有限要素解析
3.	10/25	アイソパラメトリックソリッド要素 (プログラム)
4.	11/ 1	連立一次方程式の数値解法と境界条件処理 (演習あり)
5.	11/ 8	線形有限要素法の基本的なプログラム構造 (プログラム)
6.	11/15	幾何学非線形問題の有限要素定式化 1
7.	11/22	幾何学非線形問題の有限要素定式化 2
8.	11/29	超弾性体、弾塑性体
9.	12/ 6	非線形方程式の動的解析手法、固有値解析
10.	12/13	構造要素
11.	12/20	連立一次方程式の数値解法 — skyline 法、反復法
12.	1/17	ALE 有限要素流体解析
13.	1/24	ALE 有限要素流体解析

超弾性体

はじめに本章で用いる諸量の定義およびそれらを表す記号を示す.

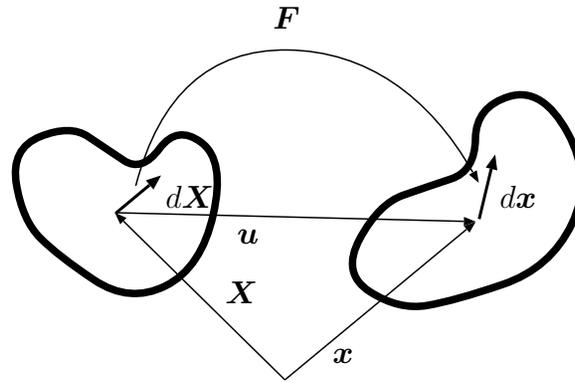


図 1: 変形勾配の概念図

- X, x : 変形前後の物質点位置ベクトル
 - u : 変位 ($= x - X$)
 - F : 変形勾配テンソル
 - C : 右 Cauchy-Green 変形テンソル
 - B : 左 Cauchy-Green 変形テンソル
 - E : Green-Lagrange 歪テンソル
 - T : Cauchy 応力テンソル
 - Π : 第 1 Piola-Kirchhoff 応力テンソル
 - S : 第 2 Piola-Kirchhoff 応力テンソル
- (1)

$$\mathbf{F} \equiv \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (2)$$

$$\mathbf{C} \equiv \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad (3)$$

$$\mathbf{B} \equiv \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \quad (4)$$

$$\mathbf{E} \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (5)$$

$$\mathbf{\Pi} \equiv J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \quad (6)$$

$$\mathbf{S} \equiv J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (7)$$

ただし, e_i は基底ベクトル, \otimes はテンソル積を表し, $J = \det \mathbf{F}$ である.

非圧縮性超弾性体 1

- 超弾性体は, たとえば次式に示すように変形やひずみの成分で微分することにより共役な応力成分が得られる弾性ポテンシャル関数 W が存在する物質として定義される.

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \quad (8)$$

- $E = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$ より

$$S_{ij} = 2 \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} \quad (9)$$

- W は客観性を有するスカラーでなければならぬため C の主値の関数として表される. 主値は以下に定義される主不変量の関数なので, W も C の主不変量の関数として表される.

$$I_C \equiv \text{tr} \mathbf{C} \quad (10)$$

$$II_C \equiv \frac{1}{2} \{ (\text{tr} \mathbf{C})^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2) \} \quad (11)$$

$$III_C \equiv \det \mathbf{C} \quad (12)$$

- したがって

$$S_{ij} = 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_C} \frac{\partial I_C}{\partial C_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial II_C} \frac{\partial II_C}{\partial C_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial III_C} \frac{\partial III_C}{\partial C_{ij}} \right) \quad (13)$$

非圧縮性超弾性体 2

- さらに

$$\frac{\partial I_C}{\partial C_{ij}} = \delta_{ij} \quad (14)$$

$$\frac{\partial II_C}{\partial C_{ij}} = I_C \delta_{ij} - C_{ij} \quad (15)$$

$$\frac{\partial III_C}{\partial C_{ij}} = III_C (\mathbf{C}^{-1})_{ij} \quad (16)$$

を用いると

$$S_{ij} = 2 \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial I_C} + \frac{\partial W}{\partial II_C} I_C \right) \delta_{ij} - \frac{\partial W}{\partial II_C} C_{ij} + \frac{\partial W}{\partial III_C} III_C (\mathbf{C}^{-1})_{ij} \right\} \quad (17)$$

- S と C の主軸方向は一致していることがわかる.
- Cauchy 応力に書き換えると

$$T_{kl} = \frac{2}{J} \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial II_B} II_B + \frac{\partial W}{\partial III_B} III_B \right) \delta_{kl} + \frac{\partial W}{\partial I_B} B_{kl} - \frac{\partial W}{\partial II_B} III_B (\mathbf{B}^{-1})_{kl} \right\} \quad (18)$$

- やはり T と B の主軸方向が一致していることがわかる.

非圧縮性超弾性体 3

- 高分子材料には、大変形下でもほとんど体積が変化しないという性質があり、一般にこのような物質は非圧縮性を仮定してモデル化を行なう。
- 非圧縮性の物質に等方的な外力を加えると、体積は変化しないまま内部応力が生じる
- 例えば非圧縮性の物体に静水圧のみが作用する場合、変形は全く生じないが内部応力は負荷した静水圧につりあうものになる。
- この内部応力は、物質点の運動の履歴からは定めることができないため、非決定応力と呼ばれる。
- 非圧縮性の物質を超弾性体でモデル化して解析を行なう場合は、変位とは別に非決定応力(不定静水圧)を独立な変数としてとる必要がある。
- このとき、 $III_C = III_B = 1$, $J = 1$ を考慮して

$$T_{kl} = -p\delta_{ij} + 2 \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial III_B} III_B + \frac{\partial W}{\partial III_B} \right) \delta_{kl} + \frac{\partial W}{\partial I_B} B_{kl} - \frac{\partial W}{\partial II_B} (\mathbf{B}^{-1})_{kl} \right\} \quad (19)$$

- ただし、 p は境界条件から定まる不定静水圧である。
- 再び第 2 Piola-Kirchhoff 応力に書き換えると以下のようなになる。

$$S_{ij} = -p(\mathbf{C}^{-1})_{ij} + 2 \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial I_C} + \frac{\partial W}{\partial III_C} I_C \right) \delta_{ij} - \frac{\partial W}{\partial II_C} C_{ij} + \frac{\partial W}{\partial III_C} (\mathbf{C}^{-1})_{ij} \right\} \quad (20)$$

Mooney-Rivlin 体 1

- 非圧縮性の超弾性体物質の弾性ポテンシャル関数 W として次式に示す Mooney-Rivlin 体がよく用いられる.

$$W^M \equiv c_1(I_C - 3) + c_2(II_C - 3) \quad (21)$$

ただし, c_1, c_2 は物質によって定まる定数である.

- Mooney-Rivlin 体を用い, 第 2 Piola-Kirchhoff 応力を求めると以下のようなになる.

$$S_{ij} = -p(\mathbf{C}^{-1})_{ij} + 2\left\{(c_1 + c_2 I_C)\delta_{ij} - c_2 C_{ij}\right\} \quad (22)$$

- 上式から外力が作用せず, 無変形すなわち $C_{ij} = \delta_{ij}$ のとき

$$T_{ij} = S_{ij} = 0 \quad (23)$$

$$S_{ij} = -p\delta_{ij} + (2c_1 + 4c_2)\delta_{ij} \quad (24)$$

となり, p が初期値 $2c_1 + 4c_2$ を持つことになる.

- この不合理を解消するため, W^M に以下のような変更を加えたモデルが提案されている.

$$W_R^M \equiv c_1(\tilde{I}_C - 3) + c_2(\tilde{II}_C - 3) \quad (25)$$

ただし

$$\tilde{I}_C \equiv \frac{I_C}{III_C^{\frac{1}{3}}} \quad (26)$$

$$\tilde{II}_C \equiv \frac{II_C}{III_C^{\frac{2}{3}}} \quad (27)$$

Mooney-Rivlin 体 2

- \tilde{I}_C , \tilde{II}_C は低減不変量 (reduced invariants) と呼ばれている.
- W_R^M に基づいて第 2 Piola-Kirchhoff 応力を求めると

$$\frac{\partial W_R^M}{\partial I_C} = \frac{\partial W_R^M}{\partial \tilde{I}_C} \frac{\partial \tilde{I}_C}{\partial I_C} = c_1 III_C^{-\frac{1}{3}} \quad (28)$$

$$\frac{\partial W_R^M}{\partial II_C} = \frac{\partial W_R^M}{\partial \tilde{II}_C} \frac{\partial \tilde{II}_C}{\partial II_C} = c_2 III_C^{-\frac{2}{3}} \quad (29)$$

$$\frac{\partial W_R^M}{\partial III_C} = \frac{\partial W_R^M}{\partial \tilde{I}_C} \frac{\partial \tilde{I}_C}{\partial III_C} + \frac{\partial W_R^M}{\partial \tilde{II}_C} \frac{\partial \tilde{II}_C}{\partial III_C} = -\frac{1}{3}c_1 I_C III_C^{-\frac{4}{3}} - \frac{2}{3}c_2 II_C III_C^{-\frac{5}{3}} \quad (30)$$

であるから

$$S_{ij} = -p(C^{-1})_{ij} + 2 \left\{ (c_1 + c_2 I_C)\delta_{ij} - c_2 C_{ij} + \left(-\frac{1}{3}c_1 I_C - \frac{2}{3}c_2 II_C \right) (C^{-1})_{ij} \right\} \quad (31)$$

- これは無変形状態で

$$T_{ij} = S_{ij} = 0 \quad (32)$$

$$S_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (33)$$

となり, p が初期値を持つという不合理は生じないことがわかる.

Mooney-Rivlin 体 3

- なお, 低減不変量の物理的な意味は以下のようなになる.
- 非圧縮性材料を考える場合, 弾性的な変形を等容変形と膨張変形に分離してとりあつかうのが妥当である. そこで変形勾配はテンソル F の等容変形の部分を次のように定義する.

$$\tilde{F} = J^{-\frac{1}{3}} F \quad (34)$$

- ここで, \tilde{F} は Flory の変形勾配テンソルと呼ばれ, 任意の変形に対して $\det \tilde{F} = 1$ である.
- 修正右 Cauchy-Green 変形テンソル \tilde{C} を次のように定義する.

$$\tilde{C} = \tilde{F}^T \cdot \tilde{F} \quad (35)$$

- 低減不変量は \tilde{C} の第 1 不変量, 第 2 不変量であるので, 単純膨張では有限変形の場合であっても $\tilde{I}_C = 3, \tilde{II}_C = 3$ である.

高次 Mooney-Rivlin 体

- 高分子材料に共通してみられる性質として、ひずみがある程度大きくなると単純引っ張りのひずみ-応力曲線が図のようにS字を描くように硬化するというものがある。
- これは Mooney-Rivlin 体の弾性ポテンシャル関数でどのような c_1, c_2 をとったとしてもこの性質を表すことはできない。
- そこで、いかに示すように I_C, II_C の 2 次, 3 次の項を付け加えることがよく行なわれている。

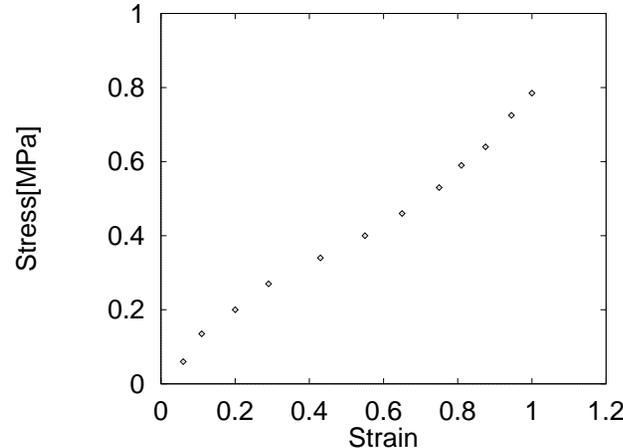


図 2: 高分子材料の単純引っ張りにおけるひずみ-応力曲線の例

$$\begin{aligned} W^H = & c_1(I_C - 3) + c_2(II_C - 3) \\ & + c_3(I_C - 3)^2 + c_4(I_C - 3)(II_C - 3) + c_5(II_C - 3)^2 \\ & + c_6(I_C - 3)^3 + c_7(I_C - 3)^2(II_C - 3) \\ & + c_8(I_C - 3)(II_C - 3)^2 + c_9(II_C - 3)^3 \end{aligned} \quad (36)$$

これによって上述の性質を表現することが可能となる。

高次 Mooney-Rivlin 体 2

- ただし, W^H も W^M と同様に, 不定静水圧 p が初期値を持つという不具合があるため低減不変量に置き換える.

$$\begin{aligned} W_R^H &= c_1(\tilde{I}_C - 3) + c_2(\tilde{II}_C - 3) \\ &\quad + c_3(\tilde{I}_C - 3)^2 + c_4(\tilde{I}_C - 3)(\tilde{II}_C - 3) + c_5(\tilde{II}_C - 3)^2 \\ &\quad + c_6(\tilde{I}_C - 3)^3 + c_7(\tilde{I}_C - 3)^2(\tilde{II}_C - 3) \\ &\quad + c_8(\tilde{I}_C - 3)(\tilde{II}_C - 3)^2 + c_9(\tilde{II}_C - 3)^3 \end{aligned} \tag{37}$$

微小変形時における縦弾性係数と横弾性係数 1

- 微小変形時において, c_1, c_2 を適当にとることにより超弾性体と線形弾性体が一致することを示す.

図に示すような単純引張変形について考える.

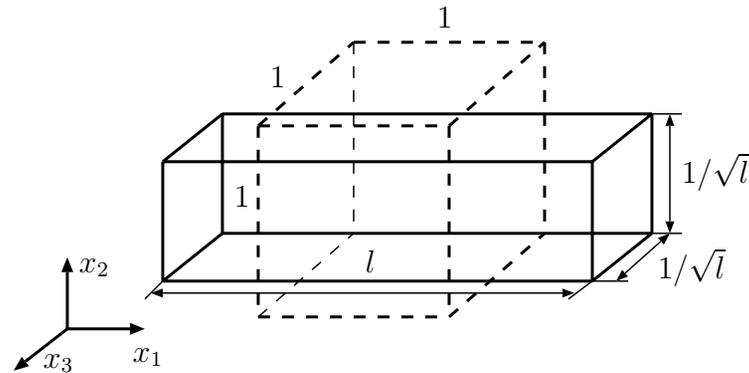


図 3: 単純引張変形

この時, \mathbf{F} , \mathbf{B} , H_B はそれぞれ

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} l & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{l} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{l} \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/l & 0 \\ 0 & 0 & 1/l \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/l^2 & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & l \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$H_B = 2l + \frac{1}{l^2} \quad (41)$$

微小変形時における縦弾性係数と横弾性係数 2

- W として W_R^H を用いれば

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_R^H}{\partial I_B} &= \frac{\partial W_R^H}{\partial \tilde{I}_B} \frac{\partial \tilde{I}_B}{\partial I_B} \\ &= III_B^{-\frac{1}{3}} \left\{ c_1 + 2c_3 (\tilde{I}_B - 3) + c_4 (\tilde{II}_B - 3) \right. \\ &\quad \left. + 3c_6 (\tilde{I}_B - 3)^2 + 2c_7 (\tilde{I}_B - 3) (\tilde{II}_B - 3) + c_8 (\tilde{II}_B - 3)^2 \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_R^H}{\partial II_B} &= \frac{\partial W_R^H}{\partial \tilde{II}_B} \frac{\partial \tilde{II}_B}{\partial II_B} \\ &= III_B^{-\frac{2}{3}} \left\{ c_2 + c_4 (\tilde{I}_B - 3) + 2c_5 (\tilde{II}_B - 3) \right. \\ &\quad \left. + c_7 (\tilde{I}_B - 3)^2 + 2c_8 (\tilde{I}_B - 3) (\tilde{II}_B - 3) + 3c_9 (\tilde{II}_B - 3)^2 \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_R^H}{\partial III_B} &= \frac{\partial W_R^H}{\partial \tilde{I}_B} \frac{\partial \tilde{I}_B}{\partial III_B} + \frac{\partial W_R^H}{\partial \tilde{II}_B} \frac{\partial \tilde{II}_B}{\partial III_B} \\ &= -\frac{1}{3} I_B III_B^{-\frac{4}{3}} \left\{ c_1 + 2c_3 (\tilde{I}_B - 3) + c_4 (\tilde{II}_B - 3) \right. \\ &\quad \left. + 3c_6 (\tilde{I}_B - 3)^2 + 2c_7 (\tilde{I}_B - 3) (\tilde{II}_B - 3) + c_8 (\tilde{II}_B - 3)^2 \right\} \\ &\quad - \frac{2}{3} II_B III_B^{-\frac{5}{3}} \left\{ c_2 + c_4 (\tilde{I}_B - 3) + 2c_5 (\tilde{II}_B - 3) \right. \\ &\quad \left. + c_7 (\tilde{I}_B - 3)^2 + 2c_8 (\tilde{I}_B - 3) (\tilde{II}_B - 3) + 3c_9 (\tilde{II}_B - 3)^2 \right\}\end{aligned}$$

微小変形時における縦弾性係数と横弾性係数 2

- Cauchy 応力を求めると

$$T_{kl} = -p\delta_{kl} + 2 \left[\left\{ \frac{\partial W_R^H}{\partial II_B} \left(2l + \frac{1}{l}\right) + \frac{\partial W_R^H}{\partial III_B} \right\} \delta_{kl} \right. \\ \left. + \frac{\partial W_R^H}{\partial I_B} \begin{bmatrix} l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/l & 0 \\ 0 & 0 & 1/l \end{bmatrix} - \frac{\partial W_R^H}{\partial II_B} \begin{bmatrix} 1/l^2 & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & l \end{bmatrix} \right]$$

- x_1 面を引っ張るとすれば, $T_{22} = T_{33} = 0$ より

$$p = 2 \left\{ \frac{1}{l} \frac{\partial W_R^H}{\partial I_B} + \left(l + \frac{1}{l^2}\right) \frac{\partial W_R^H}{\partial II_B} + \frac{\partial W_R^H}{\partial III_B} \right\} \quad (42)$$

$$T_{11} = 2 \left\{ \left(l^2 - \frac{1}{l}\right) \frac{\partial W_R^H}{\partial I_B} + \left(l - \frac{1}{l^2}\right) \frac{\partial W_R^H}{\partial II_B} \right\} \quad (43)$$

- ここで変形が微小の時 $l = 1 + \varepsilon$ とおいて ε^2 の項を無視すると

$$T_{11} = 6(c_1 + c_2)\varepsilon \quad (44)$$

となる

- $6(c_1 + c_2)$ が縦弾性係数 E に相当する.

微小変形時における縦弾性係数と横弾性係数 3

- 次に、図に示すような単純せん断変形について考える。

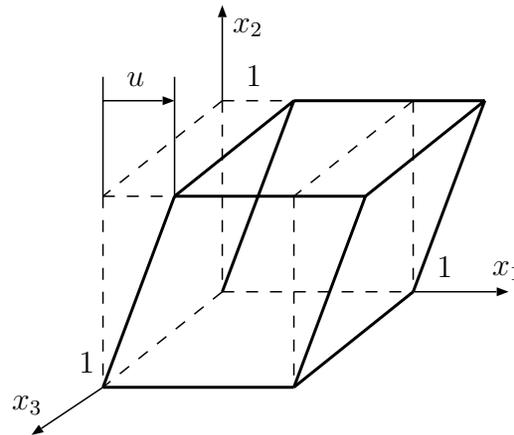


図 4: 単純せん断変形

この時 F, B, I_B, II_B はそれぞれ

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & u & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 + u^2 & u & 0 \\ u & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -u & 0 \\ -u & 1 + u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$I_B = \text{tr} \mathbf{B} = 3 + u^2 \quad (48)$$

$$II_B = \frac{1}{2} \{ (\text{tr} \mathbf{B})^2 - \text{tr}(\mathbf{B}^2) \} = 3 + u^2 \quad (49)$$

微小変形時における縦弾性係数と横弾性係数 4

- Cauchy 応力を求めると

$$T_{kl} = -p\delta_{kl} + 2 \left[\left\{ \frac{\partial W_R^H}{\partial II_B}(3 + u^2) + \frac{\partial W_R^H}{\partial III_B} \right\} \delta_{kl} + \frac{\partial W_R^H}{\partial I_B} \begin{bmatrix} 1 + u^2 & u & 0 \\ u & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\partial W_R^H}{\partial II_B} \begin{bmatrix} 1 & -u & 0 \\ -u & 1 + u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right]$$

- $T_{33} = 0$ の境界条件より不定静水圧は

$$p = 2 \left\{ \frac{\partial W_R^H}{\partial I_B} + (2 + u^2) \frac{\partial W_R^H}{\partial II_B} + \frac{\partial W_R^H}{\partial III_B} \right\} \quad (50)$$

- せん断応力は

$$T_{12} = T_{21} = 2u \left(\frac{\partial W_R^H}{\partial I_B} + \frac{\partial W_R^H}{\partial II_B} \right) \quad (51)$$

- ここで変形が微小であるとして u^2 の項を無視すると,

$$T_{12} = T_{21} = 2(c_1 + c_2)u \quad (52)$$

となり, u に対して線形となる.

- 従って, $2(c_1 + c_2)$ は横弾性係数 G に相当することが分かる.

境界値問題の弱形式定式化

- 非圧縮の超弾性体でモデル化される物体についての次のような境界値問題を考える.

物体 A が占める領域を Ω , Ω の境界を $\partial\Omega$ とし, $\partial\Omega_D \subseteq \partial\Omega$ 上で変位境界条件が与えられているものとする. この系に表面力 t , 体積力 $\rho_0 g$ が作用する時に, つりあい条件を満たす $u \in V$ 及び $p \in Q$ を求めよ. ただし V, Q はそれぞれ変位, 不定静水圧の許容関数全体の集合とする. これは以下のように定式化できる.

find $(u, p) \in (V, Q)$ such that

$$\nabla_{\mathbf{X}} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T) + \rho_0 \mathbf{g} = 0 \quad (53)$$

$$(\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T)^T \cdot \mathbf{N} = t \quad (54)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad (55)$$

$$S_{ij} = -p(C^{-1})_{ij} + 2 \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} \quad (56)$$

$$III_C = 1 \quad (57)$$

式 (53) は平衡方程式, 式 (54) は境界条件式, 式 (55) は変位と変形の関係式, 式 (56) は応力と変形の関係式 (構成方程式) 式 (57) は非圧縮性の条件である.

以下, 弾性ポテンシャル関数 W に基づいて全ポテンシャルを定義し, 停留ポテンシャルエネルギーの原理を用いて式 (53) ~ (57) の弱形式を導いて行く.

停留ポテンシャルエネルギーの原理による弱形式の導出

- W 及び外力による全ポテンシャルエネルギー Φ は以下のように定義される.

$$\Phi = \int_{\Omega} W \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} \, dS - \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega \quad (58)$$

- λ を Lagrange 未定乗数として, Φ に非圧縮の拘束条件を加える.

$$\bar{\Phi} = \Phi + \int_{\Omega} \lambda g(III_C) \, d\Omega \quad (59)$$

- ただし, $g(III_C)$ は, $III_C = 1$ で $g = 0$, $\frac{\partial g}{\partial III_C} = 1$ となるような関数である.
- また, Lagrange 未定乗数の許容関数全体の集合を Q とする.
- 停留ポテンシャルエネルギーの原理より, つりあい条件を満たす $\mathbf{u} \in V$, $\lambda \in Q$ は任意の $\delta \mathbf{u} \in V$, $\delta \lambda \in Q$ に対して下式を満たす.

$$\begin{aligned} \delta \bar{\Phi} &= \int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} \delta C_{ij} \, d\Omega + \int_{\Omega} \left(\lambda \frac{\partial g}{\partial C_{ij}} \delta C_{ij} + \delta \lambda g \right) \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS - \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial C_{ij}} \right) \delta C_{ij} \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS - \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta \lambda g \, d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (60)$$

- 式 (60) は, 仮想仕事の原理と呼ばれている.
- 式 (60) を後述するような方法により離散化を行なうことにより, 有限要素法の剛性方程式が導かれる.

Lagrange 未定乗数の物理的意味 1

- 式 (59) で導入した Lagrange 未定乗数 λ は, 実は式 (56) における不定静水圧 p に相当する. これを示すため, 式 (60) を以下のように変形していく.
- $\delta C_{ij} = \delta F_{ki} F_{kj} + F_{ki} \delta F_{kj}$ であり, また, C が対称であることから, $\partial W / \partial C_{ij}$, $\partial g / \partial C_{ij}$ も i, j に関して対称である.
- これらより式 (60) の第 1 項は

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial C_{ij}} \right) \delta C_{ij} d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial C_{ij}} \right) (\delta F_{ki} F_{kj} + F_{ki} \delta F_{kj}) d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} 2 \left(\frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial C_{ij}} \right) \delta F_{ki} F_{kj} d\Omega \qquad \equiv (*) \qquad (61)
 \end{aligned}$$

- また, $u = x - X$ より $\delta u = \delta x$ なので

$$\delta F_{ki} = \frac{\partial \delta x_k}{\partial X_i} = \frac{\partial \delta u_k}{\partial X_i} \qquad (62)$$

- これより

$$(*) = \int_{\Omega} \frac{\partial \delta u_k}{\partial X_i} \left\{ F_{kj} 2 \left(\frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial C_{ij}} \right) \right\} d\Omega \qquad (63)$$

Lagrange 未定乗数の物理的意味 2

- また

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial X_i} \left\{ 2 \left(\frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial C_{ij}} \right) F_{kj} \delta u_k \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial X_i} \left\{ 2 \left(\frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial C_{ij}} \right) F_{kj} \right\} \delta u_k + \left\{ 2 \left(\frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial C_{ij}} \right) F_{kj} \right\} \frac{\partial \delta u_k}{\partial X_i} \end{aligned} \quad (64)$$

を用いて

$$(*) = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial X_i} \left\{ 2 \left(\frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial C_{ij}} \right) F_{kj} \delta u_k \right\} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial X_i} \left\{ 2 \left(\frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial C_{ij}} \right) F_{kj} \right\} \delta u_k d\Omega \quad (65)$$

- 式 (65) の右辺第 1 項に発散定理

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{b} dV = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} dS \quad (66)$$

を適用すると

$$\begin{aligned} (*) &= \\ & \int_{\partial\Omega} n_i \left\{ 2 \left(\frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial C_{ij}} \right) F_{kj} \delta u_k \right\} dS - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial X_i} \left\{ 2 \left(\frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial C_{ij}} \right) F_{kj} \right\} \delta u_k d\Omega \end{aligned} \quad (67)$$

- これらを用いて式 (60) を整理すると

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial X_i} \left\{ 2 \left(\frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial C_{ij}} \right) F_{kj} \right\} + \rho_0 g_k \right] \delta u_k d\Omega \\ & \quad + \int_{\partial\Omega} \left[n_i \left\{ 2 \left(\frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial C_{ij}} \right) F_{kj} \right\} - t_k \right] \delta u_k dS + \int_{\Omega} \delta \lambda g(III_C) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (68)$$

Lagrange 未定乗数の物理的意味 3

- 式 (68) が任意の $\delta u \in V$, $\delta \lambda \in Q$ について成立することは, 次の式 (69), (70), (71) が成立することと同値である.

$$\frac{\partial}{\partial X_i} \left\{ 2 \left(\frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial C_{ij}} \right) F_{kj} \right\} + \rho_0 g_k = 0 \quad (69)$$

$$n_i \left\{ 2 \left(\frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial C_{ij}} \right) F_{kj} \right\} - \bar{t}_k = 0 \quad (70)$$

$$g(III_C) = 0 \quad (71)$$

- 境界値問題を強形式定式化したものと比較すると, 式 (69) が式 (53) に, 式 (70) が式 (54) に, 式 (71) が式 (57) にそれぞれ相当する. したがって

$$S_{ij} = 2 \left(\frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial C_{ij}} \right) \quad (72)$$

- また g は III_C のみの関数なので, 式 (16) も参照して

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial C_{ij}} &= \frac{\partial g}{\partial III_C} \frac{\partial III_C}{\partial C_{ij}} \\ &= \frac{\partial g}{\partial III_C} III_C (\mathbf{C}^{-1})_{ij} \end{aligned} \quad (73)$$

- よって式 (72) は

$$S_{ij} = 2 \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + 2\lambda \frac{\partial g}{\partial III_C} III_C (\mathbf{C}^{-1})_{ij} \quad (74)$$

となる. これを式 (56) と比較すると

$$p = -2\lambda \quad (75)$$

と表せ, λ が不定静水圧に相当することがわかる.

境界値問題の弱形式

- 以上から, 式 (53) ~ 式 (57) で定式化される境界値問題を解くことは, 以下を解くことに等しい.

find $(\mathbf{u}, \lambda) \in (\mathbf{V}, \mathbf{Q})$ such that

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial C_{ij}} \right) \delta C_{ij} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} t_k \delta u_k \, dS + \int_{\Omega} \rho_0 g_k \delta u_k \, d\Omega \quad (76)$$

$$\int_{\Omega} \delta \lambda g \, d\Omega = 0 \quad (77)$$

for $\forall (\delta \mathbf{u}, \delta \lambda) \in (\mathbf{V}, \mathbf{Q})$

ただし, $\lambda = -\frac{1}{2}p$

弱形式のマトリクス表示

- 非圧縮性超弾性体の境界値問題の弱形式を Newton-Raphson 法で解くために、弱形式を要素分割しマトリクス表示したものを導く過程を示す。

- 領域 Ω を要素に分割する。これを以下のように表す。

$$\Omega = \sum_e \Omega_e \quad (78)$$

- これに伴い、領域積分、境界積分はそれぞれ次のようになる。

$$\int_{\Omega} d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} d\Omega \quad (79)$$

$$\int_{\partial\Omega} dS = \sum_e \int_{\partial\Omega_e} dS \quad (80)$$

- 各要素での変位 u の補間関数を $N^{(i)}$ とすると、各要素内の u_i は以下のように離散化される。

$$u_i = N^{(n)} u_i^{(n)} \quad (81)$$

ただし、 $u_i^{(i)}$ は節点変位で、 (n) はその要素の節点数についての総和を表すものとする。

- 同様に各要素での Lagrange 乗数 λ の補間関数を $M^{(m)}$ とすれば、各要素内の λ は

$$\lambda = M^{(m)} \lambda^{(m)} \quad (82)$$

となる。ただし、 $\lambda^{(m)}$ は節点での値である。

内力ベクトル

- 弱形式

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial C_{ij}} \right) \delta C_{ij} d\Omega = \int_{\partial\Omega} t_k \delta u_k dS + \int_{\Omega} \rho_0 g_k \delta u_k d\Omega$$
$$\int_{\Omega} \delta \lambda g d\Omega = 0$$

- これを以下のように表す .

$$\int_{\Omega} \delta E_{ij} S_{ij} d\Omega = \delta R \quad (83)$$

- δE_{ij} , S_{ij} が i , j に関して対称であることから,

$$\begin{aligned} \delta E_{ij} S_{ij} &= \delta E_{11} S_{11} + \delta E_{22} S_{33} + \delta E_{33} S_{33} \\ &\quad + 2\delta E_{12} S_{12} + 2\delta E_{23} S_{23} + 2\delta E_{31} S_{31} \\ &= (\delta E_{11} \delta E_{22} \delta E_{33} 2\delta E_{12} 2\delta E_{23} 2\delta E_{31}) (S_{11} S_{22} S_{33} S_{12} S_{23} S_{31})^T \end{aligned} \quad (84)$$

- 記述の簡略化のために, 歪みの変分と応力をベクトル表示したものを定義しておく .

$$\{\delta E\} = \{\delta E_{11} \delta E_{22} \delta E_{33} 2\delta E_{12} 2\delta E_{23} 2\delta E_{31}\}^T \quad (85)$$

$$\{S\} = \{S_{11} S_{22} S_{33} S_{12} S_{23} S_{31}\}^T \quad (86)$$

内力ベクトル 2

- これらに基づいて式 (83) を要素分割すると,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \delta E_{ij} S_{ij} d\Omega &= \int_{\Omega} \{\delta E\}^T \{S\} d\Omega \\
 &= \sum_e \int_{\Omega_e} \{\delta E\}^T \{S\} d\Omega = \delta R \\
 \delta E_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial X_j} \right)
 \end{aligned} \tag{87}$$

より,

$$[Z_1] \equiv \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & 0 & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & 0 & 0 & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} & 0 & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} & 0 & 0 & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & 0 & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & 0 & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_3} & 0 & 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \end{bmatrix} \tag{88}$$

$$\left\{ \frac{\partial \delta u}{\partial X} \right\} \equiv \left\{ \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_1} \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_2} \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_3} \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_1} \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_2} \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_3} \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_1} \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_2} \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_3} \right\}^T \tag{89}$$

と定義して,

$$\{\delta E\} = [Z_1] \left\{ \frac{\partial \delta u}{\partial X} \right\} \tag{90}$$

となる.

内力ベクトル 3

- 変位の微分は以下のように補間される

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_j} u_i^{(n)} \quad (91)$$

- $\left\{ \frac{\partial \delta u}{\partial X} \right\}$ を節点変位で表すと

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \delta u_3}{\partial X_3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_1} & & & \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_1} \\ \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_2} & & & \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} \\ \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_3} & & & \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_3} \\ & \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_1} & & \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_1} \\ & \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} \\ & \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_3} & & \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_3} \\ & & \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_1} & \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_1} \\ & & \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_2} & \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} \\ & & \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X_3} & \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u_1^{(1)} \\ \delta u_2^{(1)} \\ \delta u_3^{(1)} \\ \vdots \\ \delta u_1^{(n)} \\ \delta u_2^{(n)} \\ \delta u_3^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (92)$$

となる。

- 上式中の 9 行 $3n$ 列のマトリクスを $[Z_2]$, つまり

$$\left\{ \frac{\partial \delta u}{\partial X} \right\} = [Z_2] \{ \delta u^{(n)} \} \quad (93)$$

となるように定義して, $[B]$ を

$$[B] \equiv [Z_1][Z_2] \quad (94)$$

と定義すると

$$\{\delta E\} = [B]\{\delta u^{(n)}\} \quad (95)$$

内力ベクトル 4

- $[B]$ の具体的な形は

$$[B^{(n)}] \equiv \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right) \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} & \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right) \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_3} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_3} & \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3}\right) \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} + \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right) \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} & \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right) \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_1} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_3} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} + \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right) \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_3} & \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3}\right) \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_3} \\ \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right) \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_3} + \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_3} + \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3}\right) \frac{\partial N^{(n)}}{\partial X_1} \end{bmatrix} \quad (96)$$

として 6 行 3 列のマトリクス $[B^{(n)}]$ を定義すると,

$$[B] = \left[[B^{(1)}] \dots [B^{(n)}] \right] \quad (97)$$

となる. 以上より,

$$\sum_e \int_{\Omega_e} \{\delta E\} \{S\} d\Omega = \sum_e \left[\{\delta u^{(n)}\}^T \int_{\Omega_e} [B]^T \{S\} d\Omega \right] \quad (98)$$

が得られる. 式(??), 式(98) から, 式(76) を要素分割しマトリクス表示したものは

$$\sum_e \left[\{\delta u^{(n)}\}^T \int_{\Omega_e} [B]^T \{S\} d\Omega \right] = \sum_e \left[\{\delta u^{(n)}\}^T \left[\int_{\partial\Omega_e} [N]^T \{t\} dS + \int_{\Omega_e} \rho_0 [N]^T \{g\} d\Omega \right] \right] \quad (99)$$

のようになる.

非圧縮条件

- 次に, 式 (77) のマトリクス表示を行なう.

$$\{M\} = \{M^{(1)} M^{(2)} \dots M^{(m)}\}^T \quad (100)$$

$$\{\delta\lambda^{(m)}\} = \{\delta\lambda^{(1)} \delta\lambda^{(2)} \dots \delta\lambda^{(m)}\}^T \quad (101)$$

を定義すると, 式 (77) は次のように表せる.

$$\int_{\Omega} \delta\lambda g d\Omega = \sum_e \int_{\Omega_e} \delta\lambda g d\Omega \quad (102)$$

$$= \sum_e \left[\{\delta\lambda^{(m)}\}^T \int_{\Omega_e} \{M\} g d\Omega \right] = 0 \quad (103)$$

弱形式のマトリクス表示

• ここで,

$$\{\delta u^{(n)} \delta \lambda^{(m)}\} = \left\{ \delta u_1^{(1)} \delta u_2^{(1)} \delta u_3^{(1)} \dots \delta u_1^{(n)} \delta u_2^{(n)} \delta u_3^{(n)} \delta \lambda^{(1)} \dots \delta \lambda^{(m)} \right\}^T \quad (104)$$

を定義すると, 式 (99), (103) は次のようにまとめて表せる.

$$\begin{aligned} & \sum_e \left[\{\delta u^{(n)} \delta \lambda^{(m)}\}^T \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} [B]^T \{S\} \\ \{M\}g \end{bmatrix} d\Omega \right] \\ &= \sum_e \left[\{\delta u^{(n)} \delta \lambda^{(m)}\}^T \left[\int_{\partial\Omega_e} \begin{bmatrix} [N]^T \{t\} \\ 0 \end{bmatrix} dS + \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \rho_0 [N]^T \{g\} \\ 0 \end{bmatrix} d\Omega \right] \right] \end{aligned}$$

ここで,

$$\mathbf{Q} = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} [B]^T \{S\} \\ \{M\}g \end{bmatrix} d\Omega \quad (105)$$

$$\mathbf{F} = \int_{\partial\Omega_e} \begin{bmatrix} [N]^T \{t\} \\ 0 \end{bmatrix} dS + \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \rho_0 [N]^T \{g\} \\ 0 \end{bmatrix} d\Omega \quad (106)$$

$$\mathbf{u} = \left\{ u^{(n)} \lambda^{(m)} \right\} \quad (107)$$

とすると, 式 (105) は

$$\sum_e [\delta \mathbf{u}_h^T (\mathbf{Q}(\mathbf{u}_h) - \mathbf{F})] = 0 \quad (108)$$

と表せる. 即ち, 境界値問題は

find $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ such that

$$\sum_e [\delta \mathbf{u}_h^T (\mathbf{Q}(\mathbf{u}_h) - \mathbf{F})] = 0 \quad (109)$$

for $\forall \delta \mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$

と置き換え, Newton-Raphson 法で解くことができる.

接線剛性マトリクス

- Newton-Raphson 法では, 接線剛性マトリクス $\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{u}}$ を使用するが,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{Q}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{dt} \\ &= \mathbf{K} \cdot \dot{\mathbf{u}} \end{aligned} \tag{110}$$

の関係より, 式 (76), (77) の左辺を速度型にしたものをマトリクス表示することによって, 接線剛性マトリクスを求めることができる. 以下に, その手順を示す.

速度型 式 (76) の左辺を速度型にすると

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial C_{ij}} \right) \delta C_{ij} + \left(\frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial C_{ij}} \right) \delta \dot{C}_{ij} \right\} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left[\left\{ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} + \lambda \frac{\partial^2 g}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} \right) \dot{C}_{kl} + \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial C_{ij}} \right\} \delta C_{ij} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial C_{ij}} \right) \left(\delta F_{ki} \dot{F}_{kj} + \dot{F}_{ki} \delta F_{kj} \right) \right] d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} + \lambda \frac{\partial^2 g}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} \right) \dot{C}_{kl} \delta C_{ij} \right. \\ & \quad \left. + \left(2 \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + 2\lambda \frac{\partial g}{\partial C_{ij}} \right) \delta F_{ki} \dot{F}_{kj} + \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial C_{ij}} \delta C_{ij} \right\} d\Omega \end{aligned} \tag{111}$$

また, 式 (77) の左辺を速度型にすると

$$\int_{\Omega} \delta \lambda \dot{g} \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta \lambda \frac{\partial g}{\partial C_{kl}} \dot{C}_{kl} \, d\Omega \quad (112)$$

マトリックス表示 2

- 式 (111) のマトリックス表示を行なう.

$$\dot{C}_{kl} = 2\dot{E}_{kl} \quad (113)$$

である.

$$D_{ij\ kl} = 4 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} + \lambda \frac{\partial^2 g}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} \right) \quad (114)$$

を定義すると, 式 (72), (??), (114) より式 (111) は

$$\int_{\Omega} \left(\delta E_{ij} D_{ij\ kl} \dot{E}_{kl} + \delta F_{ki} S_{ij} \dot{F}_{kj} + \delta E_{ij} 2 \frac{\partial g}{\partial C_{ij}} \dot{\lambda} \right) d\Omega \quad (115)$$

と表せる.

- 第 1 項のマトリックス表示

$$\bar{S}_{ij} \equiv D_{ij\ kl} \dot{E}_{kl} \quad (116)$$

を定義する. \bar{S}_{ij} , δE_{ij} が i, j に関して対称であることから,

$$\begin{aligned} \delta E_{ij} D_{ij\ kl} \dot{E}_{kl} &= \delta E_{ij} \bar{S}_{ij} \\ &= \{ \delta E_{11} \ \delta E_{22} \ \delta E_{33} \ \delta 2E_{12} \ \delta 2E_{23} \ \delta 2E_{31} \} \{ \bar{S}_{11} \ \bar{S}_{22} \ \bar{S}_{33} \ \bar{S}_{12} \ \bar{S}_{23} \ \bar{S}_{31} \}^T \end{aligned} \quad (117)$$

\bar{S}_{ij} は, \dot{E}_{kl} が k, l に関して対称であることから

$$\begin{aligned} \bar{S}_{ij} &= D_{ij\ 11} \dot{E}_{11} + D_{ij\ 22} \dot{E}_{22} + D_{ij\ 33} \dot{E}_{33} \\ &\quad + \frac{1}{2} (D_{ij\ 12} + D_{ij\ 21}) 2\dot{E}_{12} + \frac{1}{2} (D_{ij\ 23} + D_{ij\ 32}) 2\dot{E}_{23} + \frac{1}{2} (D_{ij\ 31} + D_{ij\ 13}) 2\dot{E}_{31} \end{aligned} \quad (118)$$

マトリックス表示 3

• ここで

$$C_{ijkl} \equiv \frac{1}{2}(D_{ijkl} + D_{ijlk}) \quad (119)$$

を定義すると, \bar{S} は次のようにマトリクス表示ができる.

$$\begin{pmatrix} \bar{S}_{11} \\ \bar{S}_{22} \\ \bar{S}_{33} \\ \bar{S}_{12} \\ \bar{S}_{23} \\ \bar{S}_{31} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1131} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2231} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3331} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1223} & C_{1231} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2323} & C_{2331} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3112} & C_{3123} & C_{3131} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{E}_{11} \\ \dot{E}_{22} \\ \dot{E}_{33} \\ 2\dot{E}_{12} \\ 2\dot{E}_{23} \\ 2\dot{E}_{31} \end{pmatrix} \quad (120)$$

この C_{ijkl} を並べた 6 行 6 列のマトリクスを $[D_1]$ とする. C_{ijkl} は, ij , kl について対称であるから, $[D_1]$ は対称である. また, 記述の簡略化のために,

$$\{\bar{S}\} = \{\bar{S}_{11} \bar{S}_{22} \bar{S}_{33} \bar{S}_{12} \bar{S}_{23} \bar{S}_{31}\}^T \quad (121)$$

$$\{\dot{E}\} = \{\dot{E}_{11} \dot{E}_{22} \dot{E}_{33} 2\dot{E}_{12} 2\dot{E}_{23} 2\dot{E}_{31}\}^T \quad (122)$$

を定義すると,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \delta E_{ij} D_{ijkl} \dot{E}_{kl} d\Omega &= \int_{\Omega} \delta E_{ij} \bar{S}_{ij} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \{\delta E\}^T [D_1] \{\dot{E}\} d\Omega \\ &= \sum_e \int_{\Omega_e} \{\delta E\}^T [D_1] \{\dot{E}\} d\Omega\end{aligned}\tag{123}$$

マトリックス表示 4

- 節点変位のベクトル

$$\{\dot{u}^{(n)}\} \equiv \{\dot{u}_1^{(1)} \dot{u}_2^{(1)} \dot{u}_3^{(1)} \cdots \dot{u}_1^{(n)} \dot{u}_2^{(n)} \dot{u}_3^{(n)}\}^T \quad (124)$$

を定義すると, 式 (95), (124) より

$$\{\dot{E}\} = [B] \{\dot{u}^{(n)}\} \quad (125)$$

と表せる.

- 以上より, 式 (115) の第 1 項は

$$\int_{\Omega} \delta E_{ij} D_{ijkl} \dot{E}_{kl} d\Omega = \sum_e \left[\{\delta u^{(n)}\}^T \int_{\Omega_e} [B]^T [D_1] [B] d\Omega \{\dot{u}^{(n)}\} \right] \quad (126)$$

となる.

マトリックス表示 1

- 第 2 項のマトリックス表示

$$\begin{aligned}
 \delta F_{ki} S_{ij} \dot{F}_{kj} = & \{\delta F_{11} \delta F_{12} \delta F_{13}\} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{F}_{11} \\ \dot{F}_{12} \\ \dot{F}_{13} \end{Bmatrix} \\
 & + \{\delta F_{21} \delta F_{22} \delta F_{23}\} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{F}_{21} \\ \dot{F}_{22} \\ \dot{F}_{23} \end{Bmatrix} \\
 & + \{\delta F_{31} \delta F_{32} \delta F_{33}\} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{F}_{31} \\ \dot{F}_{32} \\ \dot{F}_{33} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{127}$$

ここで,

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (128)$$

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} [\sigma] & & \\ & [\sigma] & \\ & & [\sigma] \end{bmatrix} \quad (129)$$

$$\{\delta F\} = \{F_{11} \ F_{12} \ F_{13} \ F_{21} \ F_{22} \ F_{23} \ F_{31} \ F_{32} \ F_{33}\}^T \quad (130)$$

$$\{\dot{F}\} = \{\dot{F}_{11} \ \dot{F}_{12} \ \dot{F}_{13} \ \dot{F}_{21} \ \dot{F}_{22} \ \dot{F}_{23} \ \dot{F}_{31} \ \dot{F}_{32} \ \dot{F}_{33}\}^T \quad (131)$$

を定義すると,

$$\delta F_{ki} S_{ij} \dot{F}_{kj} = \{\delta F\}^T [\Sigma] \{\dot{F}\} \quad (132)$$

マトリックス表示 2

- さらに,

$$\delta F_{ij} = \frac{\partial \delta x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} \quad (133)$$

$$\dot{F}_{ij} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial X_j} = \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial X_j} \quad (134)$$

より, 式(93)も参照すると

$$\{\delta F\} = \left\{ \frac{\partial \delta u}{\partial X} \right\} = [Z_2] \left\{ \delta u^{(n)} \right\} \quad (135)$$

$$\{\dot{F}\} = [Z_2] \left\{ \dot{u}^{(n)} \right\} \quad (136)$$

- これらより,

$$\delta F_{ki} S_{ij} \dot{F}_{kj} = \left\{ \delta u^{(n)} \right\}^T [Z_2]^T [\Sigma] [Z_2] \left\{ \dot{u}^{(n)} \right\} \quad (137)$$

• ここで,

$$[A_{ij}] = \left\{ \frac{\partial N^{(i)}}{\partial X_1} \quad \frac{\partial N^{(i)}}{\partial X_2} \quad \frac{\partial N^{(i)}}{\partial X_3} \right\} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N^{(j)}}{\partial X_1} \\ \frac{\partial N^{(j)}}{\partial X_2} \\ \frac{\partial N^{(j)}}{\partial X_3} \end{array} \right\} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad (138)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] & \dots & [A_{1n}] \\ [A_{21}] & \dots & & \vdots \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ [A_{n1}] & \dots & \dots & [A_{nn}] \end{bmatrix} \quad (139)$$

マトリックス表示 3

- これを用いると

$$[Z_2]^T [\Sigma] [Z_2] = [A] \quad (140)$$

となる.

- 以上より, 式(115) の第 2 項は

$$\int_{\Omega} \delta F_{ki} S_{ij} \dot{F}_{kj} d\Omega = \sum_e \left[\left\{ \delta u^{(n)} \right\}^T \int_{\Omega_e} [A] d\Omega \left\{ \dot{u}^{(n)} \right\} \right] \quad (141)$$

となる.

マトリックス表示 1

- 第 3 項のマトリックス表示

$$\{\dot{\lambda}^{(m)}\} \equiv \left\{ \dot{\lambda}^{(1)} \dot{\lambda}^{(2)} \dots \dot{\lambda}^{(m)} \right\}^T \quad (142)$$

$$\{D_2\} \equiv \left\{ 2 \frac{\partial g}{\partial C_{11}} \ 2 \frac{\partial g}{\partial C_{22}} \ 2 \frac{\partial g}{\partial C_{33}} \ 2 \frac{\partial g}{\partial C_{12}} \ 2 \frac{\partial g}{\partial C_{23}} \ 2 \frac{\partial g}{\partial C_{31}} \right\}^T \quad (143)$$

を定義すると, 式 (115) の第 3 項は

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta E_{ij} 2 \frac{\partial g}{\partial C_{ij}} \dot{\lambda} \, d\Omega &= \sum_e \int_{\Omega_e} \{\delta E\}^T \{D_2\} [M] \left\{ \dot{\lambda}^{(m)} \right\} \, d\Omega \\ &= \sum_e \left[\left\{ \delta u^{(n)} \right\}^T \int_{\Omega_e} [B]^T \{D_2\} [M] \, d\Omega \left\{ \dot{\lambda}^{(m)} \right\} \right] \end{aligned} \quad (144)$$

となる.

全体のマトリックス表示

- すべての項をあわせると

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left(\delta E_{ij} D_{ijkl} \dot{E}_{kl} + \delta F_{ki} S_{ij} \dot{F}_{kj} + \delta E_{ij} 2 \frac{\partial g}{\partial C_{ij}} \dot{\lambda} \right) d\Omega \\
 & \sum_e \left[\left\{ \delta u^{(n)} \right\}^T \int_{\Omega_e} ([B]^T [D_1] [B] + [A]) d\Omega \left\{ \dot{u}^{(n)} \right\} \right. \\
 & \left. + \left\{ \delta u^{(n)} \right\}^T \int_{\Omega_e} [B]^T \{D_2\} [M] d\Omega \left\{ \dot{\lambda}^{(m)} \right\} \right] \tag{145}
 \end{aligned}$$

のようにマトリックス表示ができる。

非圧縮の式マトリックス表示

- 非圧縮の式

$$\int_{\Omega} \delta\lambda \dot{g} \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta\lambda \frac{\partial g}{\partial C_{kl}} \dot{C}_{kl} \, d\Omega$$

$$\begin{aligned} \delta\lambda \frac{\partial g}{\partial C_{kl}} \dot{C}_{kl} &= \delta\lambda 2 \frac{\partial g}{\partial C_{kl}} \dot{E}_{kl} \\ &= \left\{ \delta\lambda^{(m)} \right\}^T [M]^T \{D_2\}^T \{\dot{E}\} \\ &= \left\{ \delta\lambda^{(m)} \right\}^T [M]^T \{D_2\}^T [B] \{\dot{u}\} \end{aligned} \quad (146)$$

となる

- これより

$$\int_{\Omega} \delta\lambda \frac{\partial g}{\partial C_{kl}} \dot{C}_{kl} \, d\Omega = \sum_e \left[\left\{ \delta\lambda^{(m)} \right\}^T \int_{\Omega_e} [M]^T \{D_2\}^T [B] \, d\Omega \left\{ \dot{u}^{(n)} \right\} \right] \quad (147)$$

のようにマトリクス表示することができる。

2つの式のマトリックス表示

• さらに,

$$\left\{ \dot{u}^{(n)} \dot{\lambda}^{(m)} \right\} \equiv \left\{ \dot{u}_1^{(1)} \dot{u}_2^{(1)} \dot{u}_3^{(1)} \cdots \dot{u}_1^{(n)} \dot{u}_2^{(n)} \dot{u}_3^{(n)} \dot{\lambda}^{(1)} \cdots \dot{\lambda}^{(m)} \right\}^T \quad (148)$$

$$[K_1] \equiv [B]^T [D_1] [B] + [A] \quad (149)$$

$$[H] \equiv [B]^T \{D_2\} [M] \quad (150)$$

と定義して式 (145), (147) をまとめて表すと

$$\sum_e \left[\left\{ \delta u^{(n)} \delta \lambda^{(m)} \right\} \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} [K_1] & [H] \\ [H]^T & 0 \end{bmatrix} d\Omega \left\{ \dot{u}^{(n)} \dot{\lambda}^{(m)} \right\} \right] \quad (151)$$

のようになり, 接線剛性マトリクス

$$[K] = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} [K_1] & [H] \\ [H]^T & 0 \end{bmatrix} d\Omega \quad (152)$$

が得られる.

微圧縮性 Mooney-Rivlin 体 1

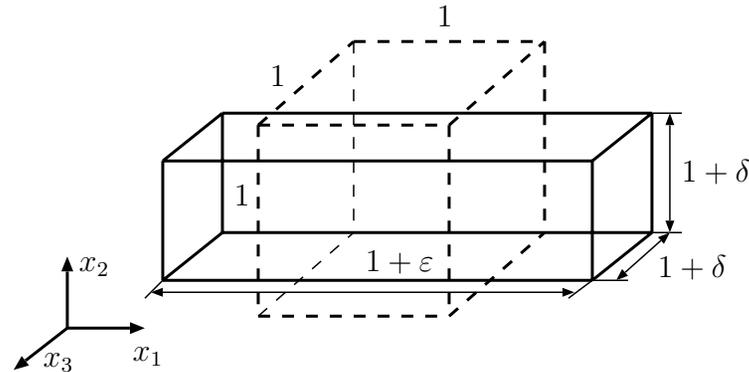
- 実際の高分子材料は微小ではあるが体積変化する .
- ここで体積変化は微小仮定し α を定数として Mooney-Rivlin 体 (あるいは一般に超弾性体のポテンシャル) を拡張する .

$$W^S = W^H + \frac{\alpha}{2} W^V (III_C)^2 \quad (153)$$

- ただし $W^V(III_C)$ は III_C のみの関数で , $III_C = 1$ のとき $W^V = 0$, $\frac{\partial W^V}{\partial III_C} = 1$ を満たすもの , たとえば $W^V = 2(J - 1), III_C - 1$ などである .
- このように定義した α は微小変形を仮定すると , 体積弾性係数に対応する .

微圧縮性 Mooney-Rivlin 体 2

- 図に示すような単純引張変形について考える.



- この時, 微小変形を仮定し, 物質が等方であることを考えると, F , B , II_B はそれぞれ以下のような形で表すことができる.

$$F = \begin{bmatrix} l + \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \delta \end{bmatrix} \quad (154)$$

$$B = FF^T = \begin{bmatrix} l + 2\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 + 2\delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 + 2\delta \end{bmatrix} \quad (155)$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} l - 2\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2\delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 2\delta \end{bmatrix} \quad (156)$$

ただし, ε, δ ともにここでは未知である.

微圧縮性 Mooney-Rivlin 体 3

- 微圧縮性超弾性体の場合，Cauchy 応力に不定静水圧が含まれる必要が無く，

$$T_{kl} = \frac{2}{J} \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial II_B} II_B + \frac{\partial W}{\partial III_B} III_B \right) \delta_{kl} + \frac{\partial W}{\partial I_B} B_{kl} - \frac{\partial W}{\partial II_B} III_B (\mathbf{B}^{-1})_{kl} \right\} \quad (157)$$

$$\frac{\partial W^S}{\partial I_C} = \frac{\partial W^S}{\partial \tilde{I}_C} \frac{\partial \tilde{I}_C}{\partial I_C} \quad (158)$$

$$= \left\{ c_1 + 2c_3(\tilde{I}_C - 3) + c_4(\tilde{II}_C - 3) \right. \quad (159)$$

$$\left. + 3c_6(\tilde{I}_C - 3)^2 + 2c_7(\tilde{I}_C - 3)(\tilde{II}_C - 3) + c_8(\tilde{II}_C - 3)^2 \right\} III_C^{-1/3} \quad (160)$$

$$\frac{\partial W^S}{\partial II_C} = \frac{\partial W^S}{\partial \tilde{II}_C} \frac{\partial \tilde{II}_C}{\partial II_C} \quad (161)$$

$$= \left\{ c_2 + c_4(\tilde{I}_C - 3) + 2c_5(\tilde{II}_C - 3) \right. \quad (162)$$

$$\left. + c_7(\tilde{I}_C - 3)^2 + 2c_8(\tilde{I}_C - 3)(\tilde{II}_C - 3) + 3c_9(\tilde{II}_C - 3)^2 \right\} III_C^{-2/3} \quad (163)$$

$$\frac{\partial W^S}{\partial III_C} = \frac{\partial W^H}{\partial \tilde{I}_C} \frac{\partial \tilde{I}_C}{\partial I_C} + \frac{\partial W^H}{\partial \tilde{II}_C} \frac{\partial \tilde{II}_C}{\partial II_C} + \alpha W^V \frac{\partial W^V}{\partial III_C} \quad (164)$$

$$= -\frac{1}{3} \left\{ c_1 + c_3(\tilde{I}_C - 3) + c_4(\tilde{II}_C - 3) + 3c_6(\tilde{I} - 3)^2 \right\} I_C III^{-4/3} \quad (165)$$

$$- \frac{2}{3} \left\{ c_2 + c_4(\tilde{I}_C - 3) + 2c_5(\tilde{II}_C - 3) + c_7(\tilde{I}_C - 3)^2 \right. \quad (166)$$

$$\left. + 2c_8(\tilde{I}_C - 3)(\tilde{II}_C - 3) + 3c_9(\tilde{II}_C - 3)^2 \right\} II_C III^{-5/3} \quad (167)$$

$$+ \alpha W^V \frac{\partial W^V}{\partial III} \quad (168)$$

微圧縮性 Mooney-Rivlin 体 4

• また ,

$$\tilde{I}_C = I_C III_C^{-1/3} = (3 + 2\varepsilon + 4\delta) \left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon - \frac{4}{3}\delta \right) \quad (169)$$

$$= 3 \quad (170)$$

$$\tilde{II}_C = II_C III_C^{-2/3} = (3 + 4\varepsilon + 8\delta) \left(1 - \frac{4}{3}\varepsilon - \frac{8}{3}\delta \right) \quad (171)$$

$$= 3 \quad (172)$$

• W^V については実際に計算してみるとたとえば , $W^V = III_C - 1$ の場合

$$\alpha W^V \frac{\partial W^V}{\partial III} = \alpha(III - 1) \quad (173)$$

$$= \alpha(2\varepsilon + 4\delta) \quad (174)$$

$W^V = 2(J - 1)$ の場合

$$\alpha W^V \frac{\partial W^V}{\partial III} = \alpha 2(J - 1) \frac{1}{J} \quad (175)$$

$$= \alpha 2(\varepsilon + 2\delta)(1 - \varepsilon - 2\delta) \quad (176)$$

$$= \alpha(2\varepsilon + 4\delta) \quad (177)$$

となり ,

$$\alpha W^V \frac{\partial W^V}{\partial III} = \alpha(2\varepsilon + 4\delta) \quad (178)$$

• これより ,

$$\frac{\partial W^S}{\partial I_C} = c_1 \left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon - \frac{4}{3}\delta\right) \quad (179)$$

$$\frac{\partial W^S}{\partial II_C} = c_2 \left(1 - \frac{4}{3}\varepsilon - \frac{8}{3}\delta\right) \quad (180)$$

$$\frac{\partial W^S}{\partial III_C} = -(c_1 + 2c_2)(1 - 2\varepsilon - 4\delta) + 2\alpha(\varepsilon + 2\delta) \quad (181)$$

• これらを T_{kl} に代入し , $T_{22} = T_{33} = 0$ を用いると ,

$$\delta = -\frac{3\alpha - (c_1 + c_2)}{6\alpha + (c_1 + c_2)}\varepsilon \quad (182)$$

が得られる .

• 従って , ポアソン比 ν は

$$\nu = \frac{3\alpha - (c_1 + c_2)}{6\alpha + (c_1 + c_2)} \quad (183)$$

• さらに

$$T_{11} = \frac{36(c_1 + c_2)\alpha}{6\alpha + (c_1 + c_2)}\varepsilon \quad (184)$$

が得られ , ヤング率 E は ,

$$E = \frac{36(c_1 + c_2)\alpha}{6\alpha + (c_1 + c_2)} \quad (185)$$

- $\alpha \rightarrow \infty$ の極限では $E = 6(c_1 + c_2)$
- 体積弾性率を求めると ,

$$\kappa = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} = 4\alpha \quad (186)$$

となる .

射影混合法 1

- 微圧縮性のポテンシャルから，弱形式を求めることができる． (R は外力のポテンシャル)

$$\Phi = \int_{\Omega} W d\Omega + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} (W^V)^2 - R \quad (187)$$

- 微圧縮性のポテンシャルから導かれる仮想仕事の式を，そのまま変位法により離散化を行うと，ロッキングを生じる
- ロッキングとは，誤差が最適収束しないこと
- これを回避する手段として， α を含む項だけ数値積分の次数を下げる，という selective/reduced integration という手法が知られているが，これは実際には対応する混合型定式化が存在している．
- 射影混合法：微圧縮性超弾性体の混合型定式化
- 変位の許容関数 V とは別の関数の空間 Q を定める．
- αW^V の Q への正射影を λ とおく．すなわち

$$\int_{\Omega} \left(W^V - \frac{\lambda}{\alpha} \right) \delta \lambda d\Omega = 0 \quad \forall \delta \lambda \in Q \quad (188)$$

- αW^V を λ に対応させる作用素を P とする．

$$P(\alpha W^V) = \lambda \quad (189)$$

- たとえば, Q として, 要素ごとに一定の関数をとったときは, この作用素は要素内で平均を取るという意味をもつ

射影混合法 2

- この P をもちいて，先のポテンシャルを修正する．

$$\tilde{\Phi} = \int_{\Omega} W d\Omega + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} (PW^V)^2 - R \quad (190)$$

- 停留ポテンシャルエネルギーの原理により，釣り合い条件を満たす $U \in V$ は下式を満たす

$$\delta\tilde{\Phi} = \int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} \delta C_{ij} d\Omega + \alpha \int_{\Omega} (PW^V) P(\delta W^V) d\Omega - \delta R = 0 \quad (191)$$

- またこのときの u に対して，

$$\int_{\Omega} \left(W^V - \frac{\lambda}{\alpha} \right) \delta\lambda d\Omega = 0 \quad \forall \delta\lambda \in Q \quad (192)$$

により， $\lambda \in Q$ を定めることができる．

射影混合法 3

- 射影混合法ではこの $u \in V, \lambda \in Q$ をそれぞれ未知量として同時に解くことになる。

$$\alpha \int_{\Omega} (PW^V) P(\delta W^V) d\Omega = \int_{\Omega} \lambda \delta W^V d\Omega \quad \forall \delta u \in V \quad (193)$$

であることが証明できることをもちいて，射影混合法の基礎式は以下のようなになる。

$$\delta \tilde{\Phi} = \int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} \delta C_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \lambda \delta W^V d\Omega - \delta R = 0 \quad (194)$$

$$\int_{\Omega} \left(W^V - \frac{\lambda}{\alpha} \right) \delta \lambda d\Omega = 0 \quad (195)$$

- 最終的に W^V が III のみの関数であることを考慮すると

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial W^V}{\partial C_{ij}} \right) \delta C_{ij} d\Omega = \delta R \quad (196)$$

$$\int_{\Omega} \left(W^V - \frac{\lambda}{\alpha} \right) \delta \lambda d\Omega = 0 \quad (197)$$

射影混合法 4

- Lagrange 未定乗数法の基礎式と比較すると

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial W}{\partial C_{ij}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial C_{ij}} \right) \delta C_{ij} d\Omega = \int_{\partial\Omega} t_k \delta u_k dS + \int_{\Omega} \rho_0 g_k \delta u_k d\Omega \quad (198)$$

$$\int_{\Omega} \delta \lambda g d\Omega = 0 \quad (199)$$

- 違いは第2式の $W^V - \frac{\lambda}{\alpha}$ と $g(= W^V)$ の部分のみ
- 内力を求めると, Lagrange 未定乗数法

$$Q = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} [B]^T \{S\} \\ \{M\} g \end{bmatrix} d\Omega \quad (200)$$

射影混合法

$$Q = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} [B]^T \{S\} \\ \{M\} (W^V - \lambda/\alpha) \end{bmatrix} d\Omega \quad (201)$$

- 速度型にして剛性マトリックスを求めると Lagrange 未定乗数法

$$[K] = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} [K_1] & [H] \\ [H]^T & 0 \end{bmatrix} d\Omega \quad (202)$$

射影混合法

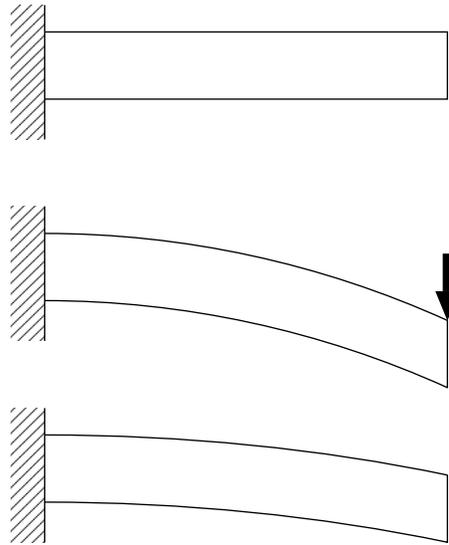
$$[K] = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} [K_1] & [H] \\ [H]^T & [G] \end{bmatrix} d\Omega \quad (203)$$

$$[G] = -\frac{1}{\alpha}[M]^T[M] \quad (204)$$

- $\alpha \rightarrow \infty$ の極限を考えると両者は一致

金属の変形の特徴

- 変形が小さいうちは荷重を取り除くと元の形状に戻るが、ある程度大きな変形をし、塑性変形が生じると、永久ひずみが残る
- 永久ひずみがあった状態で弾性変形を生じ、再度降伏する



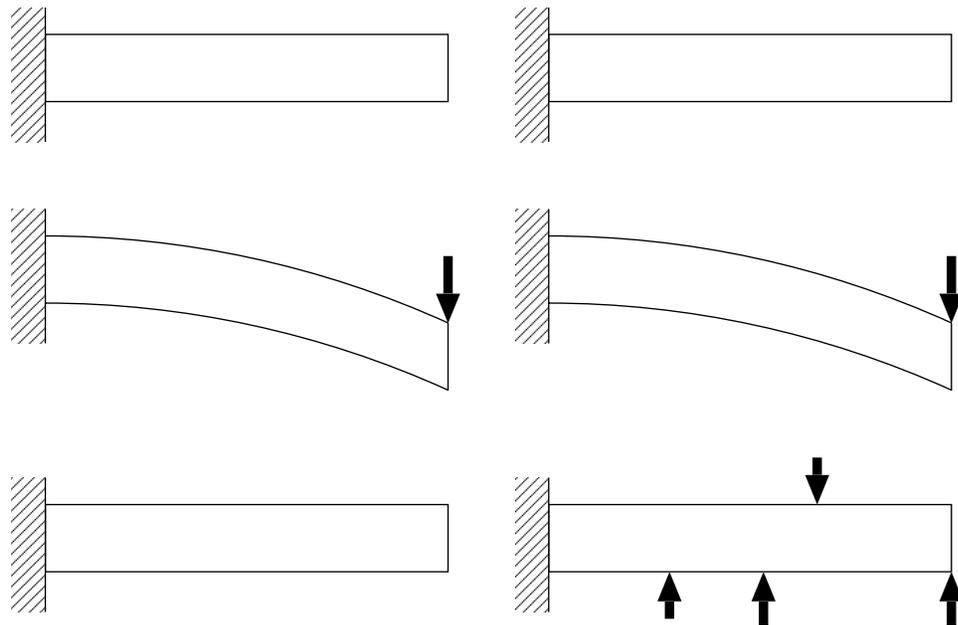
弾性体と弾塑性体の基本的な相違点

- 弾性体 (Hooke 則, ゴムなど) の現時刻 t における応力は現時刻 t のひずみのみから評価できる
- 弾塑性体の現時刻 t における応力は応力とひずみの履歴にも依存する

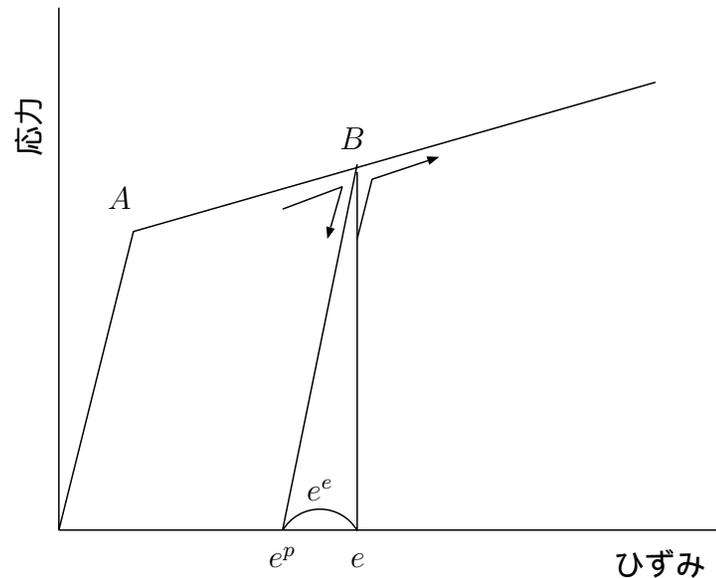
例えば

片持ち梁の先端に荷重を加え, その後, もとの形状に戻す

- 弾性変形しか生じていない場合は, 内部の応力は零
- 降伏して塑性変形を生じた場合は, 残留応力がある. もとの形状に戻ったとしても荷重は零ではない

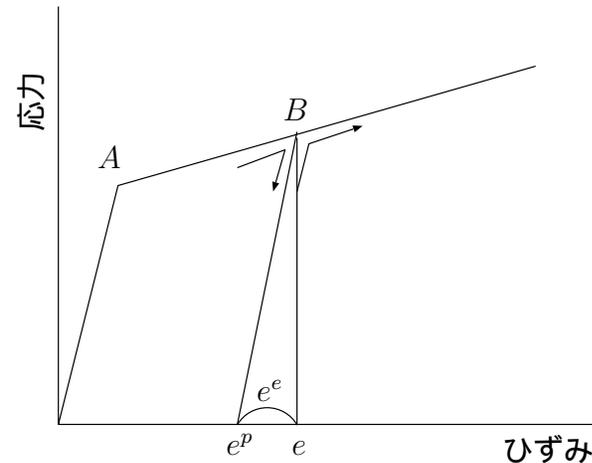


金属材料の単純引張の応力-ひずみ曲線



- 初期の弾性的に応答する範囲を超えて(A), 塑性変形を加えた後に除荷すると(B), ひずみの一部は弾性的に回復し, 永久ひずみが残る.
- 完全に除荷した後, 再度荷重を加えると除荷を開始した状態付近まで弾性的に応答し, その後降伏し, 塑性変形が進行する.

ひずみの加算分解



- 従ってひずみ e は弾性部分 e^e と塑性部分 e^p に加算的に分解できると考えることは妥当である.

$$e = e^e + e^p \quad (205)$$

- このとき応力 σ は E をヤング率として以下のような関係にある.

$$\sigma = E(e - e^p) \quad (206)$$

- 物体内部の各微小領域についてこの加算分解が成立すれば、弾性ひずみと応力の間には下記の Hooke 則が成立する.

$$\sigma_{ij} = C^e_{ijkl}(e_{kl} - e^p_{kl}) \quad (207)$$

ただし、 σ_{ij} , e_{ij} , e^p_{ij} はそれぞれ 2 階のテンソルで Cauchy 応力, 微小ひずみ, 塑性ひずみ, C^e_{ijkl} は 4 階のテンソルで Hooke 則の構成則テンソルである.

速度型の構成則テンソル

- 物体内部の各微小領域についてこの加算分解が成立すれば、弾性ひずみと応力の間には下記の Hooke 則が成立する.

$$\sigma_{ij} = C^e_{ijkl}(e_{kl} - e^p_{kl}) \quad (208)$$

- 任意の時刻で成立することから、速度型の応力ひずみ関係式が得られる.

$$\dot{\sigma}_{ij} = C^e_{ijkl}(\dot{e}_{kl} - \dot{e}^p_{kl}) \quad (209)$$

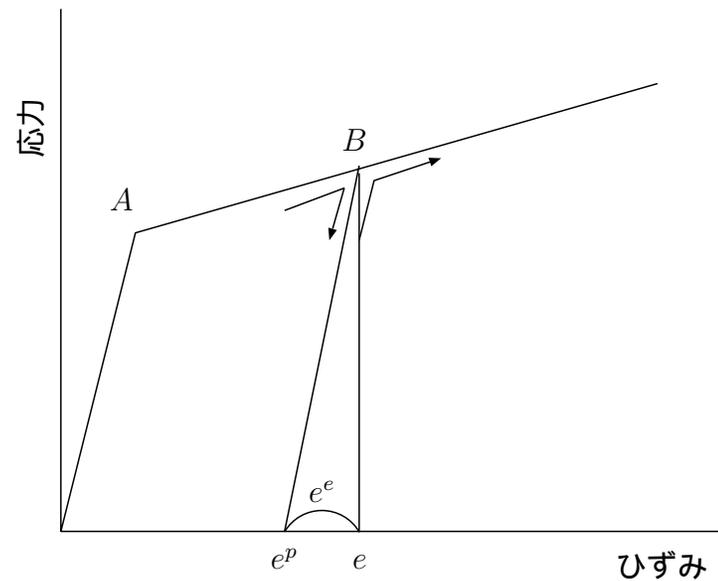
- 塑性ひずみと応力との関係付けを行なうと、最終的に以下のような形式の速度型の弾塑性構成式が得られる.

$$\dot{\sigma}_{ij} = C^{ep}_{ijkl}\dot{e}_{kl} \quad (210)$$

- 塑性ひずみと応力との関係付けの代表的なものに、流れ則 (flow rule) がある

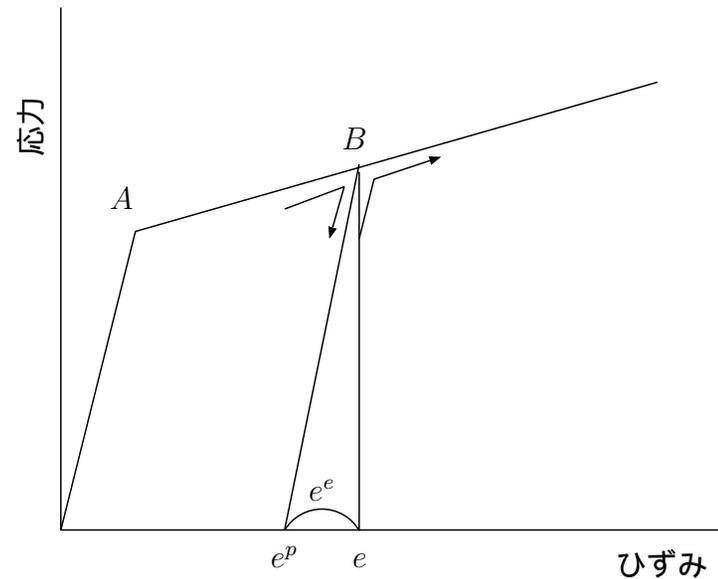
弾塑性体の特徴付け

- 降伏条件：弾性状態から塑性変形が始まる点に対応した応力状態を表す.
- 流れ則：降伏後の塑性ひずみ速度を現時刻での応力速度と関係付ける.
- 硬化則：塑性流れの進行中に降伏条件がどのように変化するかを表す.



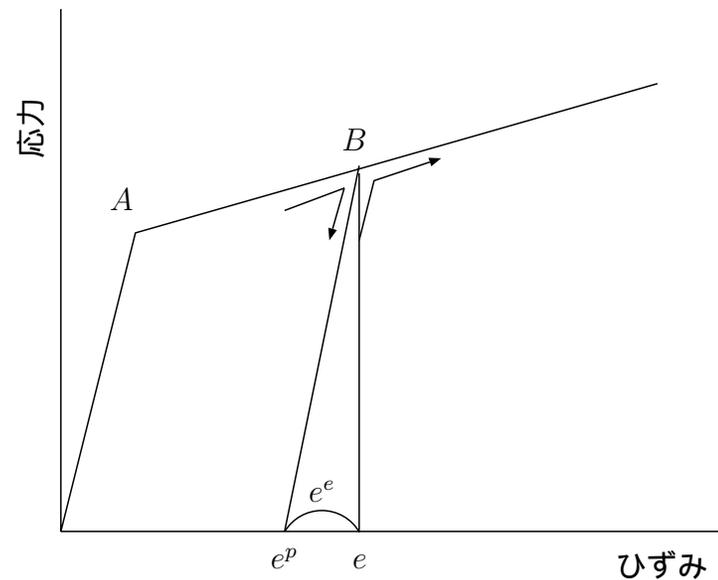
降伏条件

- 応力は 3 次元空間の 2 階のテンソルであり, 任意に座標系を設定した際に 9 成分ある
- これを, von Mises 型や Tresca 型などに代表される変換式に従ってスカラー量に変換した相当応力と呼ばれる量を求める
- 単軸引っ張り試験で求めた応力-ひずみ曲線と対応させる



降伏条件

- 具体的には, 初期の降伏条件は, 3次元的な変形をしている物体内の応力をスカラー量である相当応力に変換
- 相当応力が A に達したら塑性変形が開始すると判定する
- 変形途中で除荷が発生し, 再び負荷された際には, 相当応力が B に達したときに塑性変形が再開すると判定する.
- ここでは降伏条件として最も広く用いられている von Mises の降伏条件のみ考慮する.



Mises の相当応力

- Mises の相当応力 $\bar{\sigma}$ の定義

$$\bar{\sigma} = \left(\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (211)$$

- $\sigma'_{ij} \sigma'_{ij}$ の定義

$$\sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = \sigma_{11}'^2 + \sigma_{12}'^2 + \sigma_{13}'^2 \quad (212)$$

$$+ \sigma_{21}'^2 + \sigma_{22}'^2 + \sigma_{23}'^2 \quad (213)$$

$$+ \sigma_{31}'^2 + \sigma_{32}'^2 + \sigma_{33}'^2 \quad (214)$$

$$(215)$$

- ただし, σ'_{ij} は下式により定義される偏差応力である.

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (216)$$

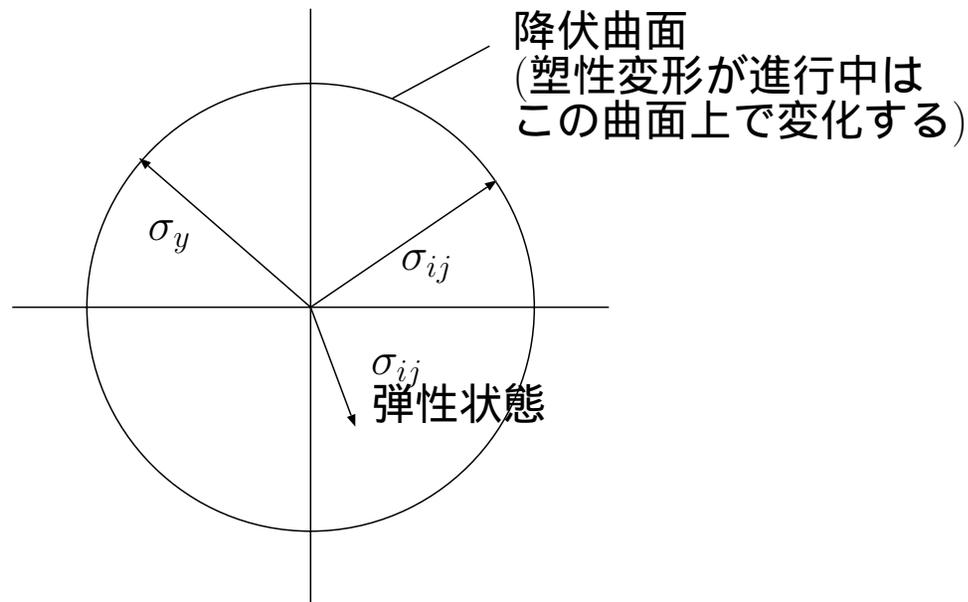
$$= \sigma_{ij} - \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \delta_{ij} \quad (217)$$

降伏関数

- 降伏関数の定義

$$F = \bar{\sigma} - \sigma_y \quad (218)$$

- σ_y は単軸引っ張り状態での降伏応力に相当する定数
- 塑性変形が起きている間は $F = 0$



関連流れ則 (associated flow rule)

- 流れ則とは, 応力で微分することにより, 塑性ひずみ速度乗数 $\dot{\lambda}$ を係数として塑性ひずみ速度を導くような塑性ポテンシャル Ψ の存在を仮定すること

$$\dot{e}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{ij}} \quad (219)$$

- 関連流れ則 (associated flow rule) とは, 塑性ポテンシャルが降伏条件の関数と同一のものと仮定すること

$$\dot{e}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (220)$$

$$F = \bar{\sigma} - \sigma_y \quad (221)$$

法線則 (normality rule)

- 関連流れ則の式の両辺に $\partial\sigma_{ij}/\partial t$ (応力速度) をかける

$$\dot{e}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (222)$$

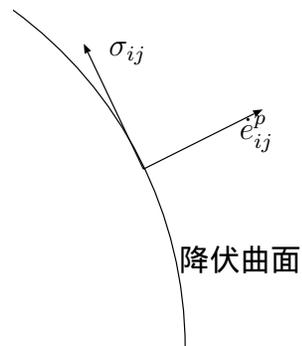
$$\dot{e}_{ij}^p \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} \quad (223)$$

$$\dot{e}_{ij}^p \dot{\sigma}_{ij} = \dot{\lambda} \dot{F} \quad (224)$$

- 塑性変形が進行中は $F = 0$ であり, $\dot{F} = 0$ 即ち,

$$\dot{e}_{ij}^p \dot{\sigma}_{ij} = \dot{\lambda} \dot{F} = 0 \quad (225)$$

- 塑性ひずみ速度と応力速度の内積が 0 , 即ち直交する
- 塑性変形が進行中の応力はつねに降伏曲面上にあるから, 応力速度は降伏曲面の接線方向に平行
- 塑性ひずみ速度は降伏曲面の法線になっている

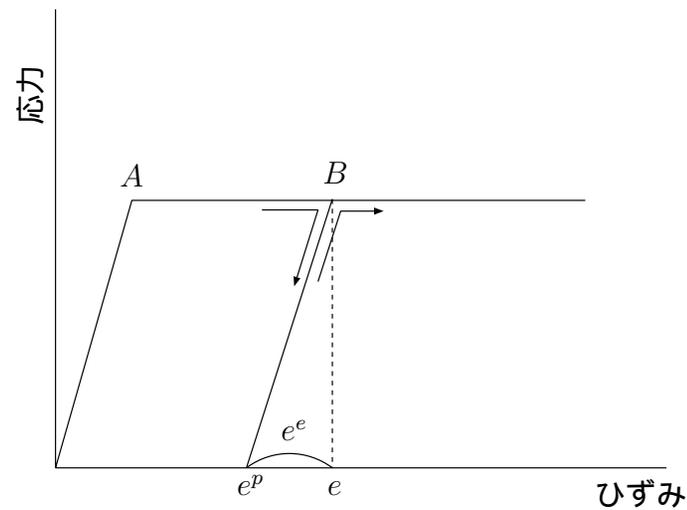


完全弾塑性体の基礎的關係式

von Mises の相当応力 $\bar{\sigma} = \left(\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}$

降伏関数 $F = \bar{\sigma} - \sigma_y$

関連流れ則 $\dot{e}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$



速度型の構成則テンソル

- 物体内部の各微小領域についてこの加算分解が成立すれば, 弾性ひずみと応力の間には下記の Hooke 則が成立する.

$$\sigma_{ij} = C^e_{ijkl}(e_{kl} - e^p_{kl}) \quad (226)$$

- 任意の時刻で成立することから, 速度型の応力ひずみ関係式が得られる.

$$\dot{\sigma}_{ij} = C^e_{ijkl}(\dot{e}_{kl} - \dot{e}^p_{kl}) \quad (227)$$

- 塑性ひずみと応力との関係付けを行なうと, 最終的に以下のような形式の速度型の弾塑性構成式が得られる.

$$\dot{\sigma}_{ij} = C^{ep}_{ijkl}\dot{e}_{kl} \quad (228)$$

弾塑性の構成則テンソルの導出 1

- 塑性変形が進行している間は常に $F = 0$ なので $\dot{F} = 0$ が成立

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = 0 \quad (229)$$

- ひずみの加算分解の式に関連流れ則を代入する

$$\dot{\sigma}_{ij} = C^e_{ijkl} (\dot{e}_{kl} - \dot{e}^p_{kl}) \quad (230)$$

$$= C^e_{ijkl} \left(\dot{e}_{kl} - \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \right) \quad (231)$$

- 前から $\partial F / \partial \sigma_{ij}$ をかけると

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C^e_{ijkl} \dot{e}_{kl} - \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C^e_{ijkl} \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \quad (232)$$

- 左辺 = 0 より, 塑性ひずみ速度乗数 $\dot{\lambda}$ は求められる

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C^e_{ijkl} \dot{e}_{kl}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C^e_{ijkl} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}}} \quad (233)$$

弾塑性の構成則テンソルの導出 2

- ひずみの加算分解の式に関連流れ則を代入した式

$$\dot{\sigma}_{ij} = C^e_{ijkl}(\dot{e}_{kl} - \dot{e}_{kl}^p) \quad (234)$$

$$= C^e_{ijkl} \left(\dot{e}_{kl} - \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \right) \quad (235)$$

- 塑性ひずみ速度乗数 $\dot{\lambda}$

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C^e_{ijkl} \dot{e}_{kl}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} C^e_{ijkl} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}}} \quad (236)$$

- 弾塑性構成則テンソル

$$\dot{\sigma}_{ij} = C^e_{ijkl} \left(\dot{e}_{kl} - \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ab}} C^e_{abcd} \dot{e}_{cd}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ab}} C^e_{abcd} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{cd}}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \right) \quad (237)$$

$$= \left(C^e_{ijkl} - \frac{C^e_{ijcd} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{cd}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ab}} C^e_{abkl}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ab}} C^e_{abcd} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{cd}}} \right) \dot{e}_{kl} \quad (238)$$

弾塑性の構成則テンソルの導出 3

- $\partial F / \partial \sigma_{ij}$ の具体的な形式

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3}{2\bar{\sigma}} \sigma'_{ij} \quad (239)$$

- 塑性ひずみ速度乗数, 弾塑性構成則テンソル

$$\dot{\lambda} = \frac{2\bar{\sigma} \sigma'_{ij} C^e_{ijkl} \dot{e}_{kl}}{3 \sigma'_{ij} C^e_{ijkl} \sigma'_{kl}} \quad (240)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left(C^e_{ijkl} - \frac{C^e_{ijcd} \sigma'_{cd} \sigma'_{ab} C^e_{abkl}}{\sigma'_{ab} C^e_{abcd} \sigma'_{cd}} \right) \dot{e}_{kl} \quad (241)$$

弾塑性の構成則テンソルの導出 4

- Hooke 則の構成則テンソル C^e_{ijkl} は λ, μ を Lamé の定数として

$$C^e_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (242)$$

- μ はせん断弾性係数 G と一致
- 塑性ひずみ速度乗数, 弾塑性構成則テンソル

$$\dot{\lambda} = \frac{\sigma'_{kl} \dot{e}_{kl}}{\bar{\sigma}} \quad (243)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left(C^e_{ijkl} - \frac{3G \sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{\bar{\sigma}^2} \right) \dot{e}_{kl} \quad (244)$$

完全弾塑性体の仮定と構成則テンソル

- 完全弾塑性体でおいた仮定

von Mises の相当応力 $\bar{\sigma} = \left(\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}$

降伏関数 $F = \bar{\sigma} - \sigma_y$

関連流れ則 $\dot{e}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$

- 弾塑性構成則テンソル

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left(C^e_{ijkl} - \frac{3G\sigma'_{ij}\sigma'_{kl}}{\bar{\sigma}^2} \right) \dot{e}_{kl} \quad (245)$$

有限変形問題への拡張 1

- ここでは弾塑性体の弾性部の構成式として, Hooke 則を有限変形の領域に拡張して用いることにする. 以下に Hooke 則の導出およびその拡張について述べる.
- 一般に現時刻での変形勾配 F のみに依存して Cauchy 応力 T が定まる物質を弾性体 (elastic material) とよぶ. すなわち

$$T(t) = f(F(t)) \quad (246)$$

- テンソル値関数 f は物質客観性の原理を満たさなければならないので次式が成立する.

$$f(F^*) = f(Q \cdot F) = Q \cdot f(F) \cdot Q^T \quad (247)$$

ただし F^*, F は基準枠 O^*, O から観測した物質点の変形勾配で, O は O^* に対して Q だけ回転しているとする.

- さらに物質が等方であると仮定すると, 回転を表す任意の直交テンソルを P として

$$f(F) = f(F \cdot P) \quad (248)$$

が成立しなければならない. これより等方弾性体の構成式は左ストレッチテンソル V の関数となる.

$$T = f(V) \quad (249)$$

- 上式に物質客観性の原理を用いると以下のようなになる.

$$f(V^*) = f(Q \cdot V \cdot Q^T) = Q \cdot f(V) \cdot Q^T \quad (250)$$

ただし V^*, V は基準枠 O^*, O から観測した左ストレッチテンソルで, O は O^* に対して Q だけ回転しているとする.

- このような関係を満たす $f(V)$ は等方テンソル関数 (isotropic tensor function) と呼ばれる.
- さらに式 (250) の形式の等方テンソル関数は T, V が対称テンソルであるとき, 一般に

$$T = f(V) = \phi_0 I + \phi_1 V + \phi_2 V^2 \quad (251)$$

のように表すことができる. ただし, ϕ_i ($i = 0, 1, 2$) は V の主不変量のスカラー関数である. これを表示定理 (representation theorem) と呼ぶ.

- 式 (249) は $V = B^{1/2}$ であるところから以下のように表すこともできる.

$$T = g(B) \quad (252)$$

- この場合も物質客観性の原理より

$$g(B^*) = g(Q \cdot B \cdot Q^T) = Q \cdot g(B) \cdot Q^T \quad (253)$$

となるので, $g(B)$ も等方テンソル関数であり, 表示定理により以下のようなになる.

$$T = \psi_0 I + \psi_1 B + \psi_2 B^2 \quad (254)$$

$$= \xi_0 I + \xi_1 B + \xi_{-1} B^{-1} \quad (255)$$

ただし, すべての係数は B の主不変量の関数である.

- 以上の等方弾性体の構成式の一般形に線形化を施すことにより通常の微小変形理論における Hooke 則を導く。微小変形状態においては

$$\mathbf{V} \approx \mathbf{I} + \frac{1}{2}\{\mathbf{u} \otimes \nabla \mathbf{x} + \nabla \mathbf{x} \otimes \mathbf{u}\} \quad (256)$$

であるから、微小ひずみ $\mathbf{E}_{(L)}$ を

$$\mathbf{E}_{(L)} = \frac{1}{2}\{\mathbf{u} \otimes \nabla \mathbf{x} + \nabla \mathbf{x} \otimes \mathbf{u}\} \quad (257)$$

のように定義すれば、式(251)は $\mathbf{E}_{(L)}$ の高次項を無視して

$$\mathbf{T} = (\phi_0 + \phi_1 + \phi_2)\mathbf{I} + (\phi_1 + 2\phi_2)\mathbf{E}_{(L)} \quad (258)$$

$$= \eta_0\mathbf{I} + \eta_1\mathbf{E}_{(L)} \quad (259)$$

のようになり、 η_0, η_1 はそれぞれ $\mathbf{E}_{(L)}$ の主不変量の関数であることを証明することができる。

- 最終的に \mathbf{T} と $\mathbf{E}_{(L)}$ が線形同次であると仮定すれば、下式に示す Hooke 則が得られる。

$$\mathbf{T} = (\lambda \text{tr} \mathbf{E}_{(L)})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}_{(L)} \quad (260)$$

ここで、 λ, μ は Lamé の定数と呼ばれている。

有限変形問題への拡張 2

- 次に, 大変形に対応した Hooke 則を導く.
- 等方弾性体の構成式の一般形は $T = f(V)$, $T = g(B)$ であったが, B と Almansi ひずみテンソル A の間には

$$A = \frac{1}{2}(I - B) \quad (261)$$

の関係があるので, 改めて

$$T = h(A) \quad (262)$$

- やはり物質客観性の原理により下式が成立する.

$$h(A^*) = h(Q \cdot A \cdot Q^T) = Q \cdot h(A) \cdot Q^T \quad (263)$$

ただし A^* , A はそれぞれ基準枠 O^* , O から観測したもので, O は O^* に対して Q だけ回転している. これより $h(A)$ は等方な関数であり, したがって表示定理により以下のようなになる.

$$T = h(A) = \zeta_0 I + \zeta_1 A + \zeta_2 A^2 \quad (264)$$

- Hooke 則と同様に線形化を施せば

$$T = (\lambda \text{tr} A) I + 2\mu A \quad (265)$$

が得られる. 微小変形を想定すれば

$$A \approx E_{(L)} \quad (266)$$

なので, λ, μ は通常の Lamé 定数と同じものである.

有限変形問題への拡張 3

- 次に $T = (\lambda \text{tr} A)I + 2\mu A$ を速度型にする.
- \dot{T}, \dot{A} とともに客観性はない.

$$T^* = QTQ^T \quad (267)$$

$$\dot{T}^* = \dot{Q}TQ^T + Q\dot{T}Q^T + QT\dot{Q}^T \quad (268)$$

- \bar{W} を適当な反対称テンソルとして, T, A の客観速度 $\overset{\circ}{T}, \overset{\circ}{A}$ を以下のように表す.

$$\overset{\circ}{T} = \dot{T} - \bar{W} \cdot T + T \cdot \bar{W} \quad (269)$$

$$\overset{\circ}{A} = \dot{A} - \bar{W} \cdot A + A \cdot \bar{W} \quad (270)$$

- 各種客観速度

$$\text{Jaumann} \quad \overset{\circ}{T}_{(J)} = \dot{T} - W \cdot T + T \cdot W \quad (271)$$

$$\text{Oldroyd} \quad \overset{\circ}{T}_{(O)} = \dot{T} - L \cdot T - T \cdot L^T \quad (272)$$

$$\text{Cotter - Rivlin} \quad \overset{\circ}{T}_{(C)} = \dot{T} + L^T \cdot T + T \cdot L \quad (273)$$

$$\text{Green - Naghdi} \quad \overset{\circ}{T}_{(G)} = \dot{T} - \Omega \cdot T + T \cdot \Omega \quad (\Omega = \dot{R} \cdot R^T) \quad (274)$$

- このとき、以下の関係が成立する.

$$\overset{\circ}{T} = (\lambda \text{tr} \overset{\circ}{A})I + 2\mu \overset{\circ}{A} \quad (275)$$

- ここで、物質点の回転を含む剛体運動は大きい、ひずみは微小である場合 (有限変形, 微小ひずみ問題) を考えると,

$$\mathbf{F}_t(\tau) \approx \mathbf{R}_t(\tau), \mathbf{U}_t(\tau) \approx \mathbf{I} \quad (276)$$

なので、以下の関係が成立する.

$$\dot{\mathbf{T}}_{(J)} \approx \dot{\mathbf{T}}_{(O)} \approx \dot{\mathbf{T}}_{(C)} \approx \dot{\mathbf{T}}_{(G)} \quad (277)$$

$$\dot{\mathbf{A}}_{(J)} \approx \dot{\mathbf{A}}_{(O)} \approx \dot{\mathbf{A}}_{(C)} \approx \dot{\mathbf{A}}_{(G)} \quad (278)$$

ただし,

$$\dot{\mathbf{T}}_{(J)} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{W} \quad (279)$$

$$\dot{\mathbf{T}}_{(J)} = \dot{\mathbf{T}}_{(O)} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \quad (280)$$

$$\dot{\mathbf{T}}_{(J)} = \dot{\mathbf{T}}_{(C)} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \quad (281)$$

$$\dot{\mathbf{T}}_{(G)} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{\Omega} \quad (282)$$

$$\mathbf{W} \approx \mathbf{\Omega} \quad (283)$$

- また、 $\dot{\mathbf{A}}_{(C)} = \mathbf{D}$ であることを考えると,

$$\dot{\mathbf{T}} = (\lambda \text{tr} \mathbf{D}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} \quad (284)$$

となる. また後述するように有限要素解析する際に用いる接線剛性マトリックスを対称なものにするため \mathbf{T} を相対 Kirchhoff 応力 $\hat{\mathbf{T}}_t(\tau) = \mathbf{J}_t(\tau) \mathbf{T}(\tau)$ で置き換えた

$$\dot{\hat{\mathbf{T}}}_t(t) = (\lambda \text{tr} \mathbf{D}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} \quad (285)$$

が用いられることも多い。ただし,

$$\hat{\mathbf{T}}_t(t)_{(J)} = \mathring{\mathbf{T}}_{(J)} + \mathbf{T} \text{tr} \mathbf{D} \quad (286)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_t(t)_{(O)} = \mathring{\mathbf{T}}_{(O)} + \mathbf{T} \text{tr} \mathbf{D} \quad (287)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_t(t)_{(C)} = \mathring{\mathbf{T}}_{(C)} + \mathbf{T} \text{tr} \mathbf{D} \quad (288)$$

弾塑性構成則の拡張

- 弾塑性構成則を有限変形に拡張する際の一例を示す. 物質点の速度ベクトル v が弾性部分 v^e と塑性部分 v^p の和によって

$$v = v^e + v^p \quad (289)$$

のように与えられるとすると, 速度勾配テンソル L の対称成分をとった変形速度テンソル D についても

$$D = D^e + D^p \quad (290)$$

なる加算分解が成立する.

- ここでは $\dot{\sigma}_{ij} \Rightarrow \dot{T}_{ij}$, $e^p_{ij} \Rightarrow D^p_{ij}$ として古典弾塑性理論を有限変形に対応させる.
- すなわち, 一般的には C^{ep}_{ijkl} を古典理論に基づく弾塑性の構成則テンソルとして

$$\dot{T}_{ij} = C^{ep}_{ijkl} D_{kl} \quad (291)$$

とする.

- しかしながら, ここでは, 後述する接線剛性マトリックスなどの取り扱いを容易にするために, 式(291)にかえて, Cauchy 応力を相対 Kirchhoff 応力で置き換えた

$$\hat{\dot{T}}_{ij} = C^{ep}_{ijkl} D_{kl} \quad (292)$$

を用いることにする.

- 相対 Kirchhoff 応力, および背応力の客観速度として Jaumann 速度を用いる.

- 以下に主要な結果のみ示す.
- 速度型の構成則テンソル

$$C^{ep}_{ijkl} = \left(C_{ijkl} - \frac{3G\tilde{T}'_{ij}\tilde{T}'_{kl}}{\bar{\sigma}^2} \right) \quad (293)$$

ただし \tilde{T}'_{ij} は, $\tilde{T}'_{ij} = \tilde{T}_{ij} - \frac{1}{3}\tilde{T}_{kk}\delta_{ij}$ で求められる偏差成分である.

- 相当塑性ひずみ速度

$$\dot{e} = \frac{\tilde{T}'_{kl}D_{kl}}{\bar{\sigma}} \quad (294)$$

- 塑性ひずみ速度乗数

$$\dot{\lambda} = \frac{\tilde{T}'_{kl}D_{kl}}{\bar{\sigma}} \quad (295)$$

応力積分 1

- 弾塑性体の構成則は速度型構成則であり、応力速度とひずみ速度の関係が与えられているだけで、応力や塑性ひずみはそれぞれの速度を積分することによってのみ求めることができる。微小変形を仮定した場合、

$${}^t e_{ij}^p = \int_0^t {}^\tau \dot{e}_{ij}^p d\tau \quad (296)$$

$${}^t \sigma_{ij} = \int_0^t {}^\tau \dot{\sigma}_{ij} d\tau \quad (297)$$

$$= \int_0^t {}^\tau C^{ep}_{ijkl} {}^\tau \dot{e}_{kl} d\tau \quad (298)$$

あるいは増分的に

$${}^{t'} \sigma_{ij} - {}^t \sigma_{ij} = \int_t^{t'} {}^\tau C^{ep}_{ijkl} {}^\tau \dot{e}_{kl} d\tau \quad (299)$$

によりもとめることになる。しかしながら構成則テンソル ${}^t C^{ep}_{ijkl}$ はその時刻の応力の関数であるため、式(298), (299)は解析的に積分することはほぼ不可能で、数値的に応力積分を行なうことになる。

応力積分 2

- 有限変形の場合の応力積分については、いくつかの方法が提案されている。最も簡単なものは古典的な応力積分における応力を相対 Kirchhoff 応力に置き換えたものである。ただし、弾性の場合には、式 (305) の ${}^t C^{ep}_{ijkl}$ にかえて、 ${}^t C^e_{ijkl}$ を用いる。

$${}^t T_{ij} = {}^t T_{ij} + \int_t^{t'} {}^\tau \dot{T}_{ij} \, d\tau \quad (300)$$

$$= {}^t T_{ij} + \int_t^{t'} \left\{ {}^\tau \hat{T}_{\tau ij} - (\text{tr} {}^\tau \mathbf{D}) {}^\tau T_{ij} \right\} d\tau \quad (301)$$

$$= {}^t T_{ij} + \int_t^{t'} \left\{ {}^\tau \hat{T}_{\tau ij} + {}^\tau W_{ik} {}^\tau \hat{T}_{\tau kj} - {}^\tau \hat{T}_{\tau ik} {}^\tau W_{kj} - (\text{tr} {}^\tau \mathbf{D}) {}^\tau T_{ij} \right\} d\tau \quad (302)$$

$$= {}^t T_{ij} + \int_t^{t'} \left\{ {}^\tau \hat{T}_{\tau ij} + {}^\tau W_{ik} {}^\tau T_{kj} - {}^\tau T_{ik} {}^\tau W_{kj} - (\text{tr} {}^\tau \mathbf{D}) {}^\tau T_{ij} \right\} d\tau \quad (303)$$

$$= {}^t T_{ij} + \int_t^{t'} \left\{ {}^\tau C^{ep}_{ijkl} {}^\tau D_{kl} + {}^\tau W_{ik} {}^\tau T_{kj} - {}^\tau T_{ik} {}^\tau W_{kj} - (\text{tr} {}^\tau \mathbf{D}) {}^\tau T_{ij} \right\} d\tau \quad (304)$$

$$= {}^t T_{ij} + \left\{ {}^t C^{ep}_{ijkl} {}^t D_{kl} + {}^t W_{ik} {}^t T_{kj} - {}^t T_{ik} {}^t W_{kj} - (\text{tr} {}^t \mathbf{D}) {}^t T_{ij} \right\} \Delta t \quad (305)$$

弾塑性体の境界問題の弱形式定式化

- 慣性力が無視できるような準静的な弾塑性体でモデル化された物体の運動を考える。物体の変形前後の領域をそれぞれ V, v , 表面を S, s とする。変形後の物体表面 s の各点において単位面積あたり \underline{t} の表面力, あるいは変位 \underline{u} が, また物体 v 内部の各点において単位質量あたり g の物体力が与えられているとする。

このとき物体が平衡状態にあるためには次の諸条件が満足されなければならない。ただし \mathbf{T} は Cauchy 応力である。

$$\nabla_x \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} = 0 \quad (306)$$

$$\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{n} = \underline{t} \quad (307)$$

$$\mathbf{u} = \underline{u} \quad (308)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (309)$$

$$\overset{\circ}{T}_{ij} = C_{ijkl}^{ep} D_{kl}, \quad T_{ij} = \int_0^t \overset{\circ}{T}_{ij} dt \quad (310)$$

弾塑性体の境界問題の有限要素定式化

- これは以下のように弱形式にできる

$$\int_v \mathbf{T} : \delta \mathbf{A}_{(L)} dv = \int_{\delta v} \underline{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{w} ds + \int_v \rho g \cdot \mathbf{w} dv \quad (311)$$

ただし $\delta \mathbf{A}_{(L)}$ は, $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ から導かれる Almange ひずみの線形成分である.

$$\delta \mathbf{A}_{(L)ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) \quad (312)$$

- updated Lagrange 法により内力ベクトルと剛性マトリックスをもとめる .

$$\int_v \delta A_{ij} T_{ij} dv = \int_v \{\delta u\}^T [B]^T \{T\} dv \quad (313)$$

$$\mathbf{Q} = \int_v [B]^T [T] dv \quad (314)$$

$$\begin{aligned} & \int_v (\delta A_{ij} S_t(t)_{ij} + \delta F_{ki} T_{ij} L_{kj}) dv \\ & = \{\delta u\}^T \int_v \left([B]^T [\tilde{D}] [B] + [G] \right) dv \{u\} \end{aligned} \quad (315)$$

弾塑性構成則マトリックス 1

- 前述のように、一般に速度型の構成則が以下のように与えられたとする.

$$\dot{S}_{ij} = C_{ijkl} D_{kl} \quad (316)$$

$D_{kl} = D_{lk}$ が成立する時,

$$\tilde{C}_{ijkl} = \frac{1}{2} (C_{ijkl} + C_{ijlk}) \quad (317)$$

とすれば以下のようにマトリックス表示できる. このマトリックスを通称 D マトリックスと呼ぶが, ストレッチテンソル D_{ij} との混同を避けるため $[\tilde{C}]$ とする.

$$\begin{Bmatrix} \dot{S}_{11} \\ \dot{S}_{22} \\ \dot{S}_{33} \\ \dot{S}_{12} \\ \dot{S}_{23} \\ \dot{S}_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{1111} & \tilde{C}_{1122} & \tilde{C}_{1133} & \tilde{C}_{1112} & \tilde{C}_{1123} & \tilde{C}_{1131} \\ \tilde{C}_{2211} & \tilde{C}_{2222} & \tilde{C}_{2233} & \tilde{C}_{2212} & \tilde{C}_{2223} & \tilde{C}_{2231} \\ \tilde{C}_{3311} & \tilde{C}_{3322} & \tilde{C}_{3333} & \tilde{C}_{3312} & \tilde{C}_{3323} & \tilde{C}_{3331} \\ \tilde{C}_{1211} & \tilde{C}_{1222} & \tilde{C}_{1233} & \tilde{C}_{1212} & \tilde{C}_{1223} & \tilde{C}_{1231} \\ \tilde{C}_{2311} & \tilde{C}_{2322} & \tilde{C}_{2333} & \tilde{C}_{2312} & \tilde{C}_{2323} & \tilde{C}_{2331} \\ \tilde{C}_{3111} & \tilde{C}_{3122} & \tilde{C}_{3133} & \tilde{C}_{3112} & \tilde{C}_{3123} & \tilde{C}_{3131} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{22} \\ D_{33} \\ 2D_{12} \\ 2D_{23} \\ 2D_{31} \end{bmatrix} \quad (318)$$

マトリックス $[\tilde{C}]$ は, $\tilde{C}_{ijkl} = \tilde{C}_{klij}$ のとき, 対称になることがわかる.

弾塑性構成則マトリックス 1

- 線形弾性体 Hooke 則の場合

$$C_{ijkl}^e = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (319)$$

$$\tilde{C}_{ijkl}^e = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (320)$$

$$\tilde{C}_{klij}^e = \lambda \delta_{kl} \delta_{ij} + \mu (\delta_{ki} \delta_{lj} + \delta_{kj} \delta_{li}) \quad (321)$$

$$= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ki} \delta_{lj} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (\delta_{mn} = \delta_{nm}) \quad (322)$$

$$= \tilde{C}_{ijkl}^e \quad (323)$$

$$[\tilde{C}^e] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (324)$$

Lamé の定数 λ, μ はヤング率 E , ポアソン比 ν を用いて以下のようにあらわされる.

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (325)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (326)$$

弾塑性構成則マトリックス 1

- 塑性部分の構成則マトリックスは幾何学的非線形性を考慮しなければ以下のようなになる。

$$C_{ijkl}^p = \frac{3G\tilde{\sigma}'_{ij}\tilde{\sigma}'_{kl}}{\bar{\sigma}^2} \quad (327)$$

$$A = \frac{3G}{\bar{\sigma}^2} \quad (328)$$

とおくことで、形式的に

$$C_{ijkl}^p = A\tilde{\sigma}'_{ij}\tilde{\sigma}'_{kl} \quad (329)$$

と表される。

- このとき、

$$\tilde{C}_{ijkl}^p = \frac{1}{2} \left(C_{ijkl}^p + C_{ijlk}^p \right) = C_{ijkl}^p \quad (330)$$

$$\tilde{C}_{ijkl}^p = \tilde{C}_{klij}^p \quad (331)$$

であり、これより C_{ijkl}^p をマトリックス表示したものは 6×6 の対称マトリックスになる。

$$[\tilde{C}^p] = \begin{bmatrix} A\tilde{\sigma}'_{11}\tilde{\sigma}'_{11} & A\tilde{\sigma}'_{11}\tilde{\sigma}'_{22} & A\tilde{\sigma}'_{11}\tilde{\sigma}'_{33} & A\tilde{\sigma}'_{11}\tilde{\sigma}'_{12} & A\tilde{\sigma}'_{11}\tilde{\sigma}'_{23} & A\tilde{\sigma}'_{11}\tilde{\sigma}'_{31} \\ A\tilde{\sigma}'_{22}\tilde{\sigma}'_{11} & A\tilde{\sigma}'_{22}\tilde{\sigma}'_{22} & A\tilde{\sigma}'_{22}\tilde{\sigma}'_{33} & A\tilde{\sigma}'_{22}\tilde{\sigma}'_{12} & A\tilde{\sigma}'_{22}\tilde{\sigma}'_{23} & A\tilde{\sigma}'_{22}\tilde{\sigma}'_{31} \\ A\tilde{\sigma}'_{33}\tilde{\sigma}'_{11} & A\tilde{\sigma}'_{33}\tilde{\sigma}'_{22} & A\tilde{\sigma}'_{33}\tilde{\sigma}'_{33} & A\tilde{\sigma}'_{33}\tilde{\sigma}'_{12} & A\tilde{\sigma}'_{33}\tilde{\sigma}'_{23} & A\tilde{\sigma}'_{33}\tilde{\sigma}'_{31} \\ A\tilde{\sigma}'_{12}\tilde{\sigma}'_{11} & A\tilde{\sigma}'_{12}\tilde{\sigma}'_{22} & A\tilde{\sigma}'_{12}\tilde{\sigma}'_{33} & A\tilde{\sigma}'_{12}\tilde{\sigma}'_{12} & A\tilde{\sigma}'_{12}\tilde{\sigma}'_{23} & A\tilde{\sigma}'_{12}\tilde{\sigma}'_{31} \\ A\tilde{\sigma}'_{23}\tilde{\sigma}'_{11} & A\tilde{\sigma}'_{23}\tilde{\sigma}'_{22} & A\tilde{\sigma}'_{23}\tilde{\sigma}'_{33} & A\tilde{\sigma}'_{23}\tilde{\sigma}'_{12} & A\tilde{\sigma}'_{23}\tilde{\sigma}'_{23} & A\tilde{\sigma}'_{23}\tilde{\sigma}'_{31} \\ A\tilde{\sigma}'_{31}\tilde{\sigma}'_{11} & A\tilde{\sigma}'_{31}\tilde{\sigma}'_{22} & A\tilde{\sigma}'_{31}\tilde{\sigma}'_{33} & A\tilde{\sigma}'_{31}\tilde{\sigma}'_{12} & A\tilde{\sigma}'_{31}\tilde{\sigma}'_{23} & A\tilde{\sigma}'_{31}\tilde{\sigma}'_{31} \end{bmatrix} \quad (332)$$

弾塑性構成則マトリックス 2

- 幾何学的非線形性を考慮した弾塑性構成則テンソルとして, Kirchhoff 応力の Jaumann 速度と, 変形速度テンソル D の間で定義されたものを用いるとする.

$${}^t\overset{\circ}{\mathbf{T}}^{(J)} = \mathbf{C}^{ep} : \mathbf{D} \quad (\mathbf{C} \text{ は 4 階の構成則テンソル}) \quad (333)$$

- 前述の方法により構成則テンソルのマトリックス表示を行なうために ${}^t\dot{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{C}} : \mathbf{D}$ の形式で表す.

$${}^t\dot{\mathbf{S}} = {}^t\overset{\circ}{\mathbf{T}}^{(J)} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \quad (334)$$

$$= \mathbf{C}^{ep} : \mathbf{D} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \quad (335)$$

$${}^t\dot{S}_{ij} = C_{ijkl}^{ep} D_{kl} - D_{ik} T_{kj} - T_{ik} D_{kj} \quad (336)$$

$$= C_{ijkl}^{ep} D_{kl} - \delta_{il} T_{kj} D_{kl} - T_{ik} \delta_{jl} D_{kl} \quad (337)$$

$$= \left\{ C_{ijkl}^{ep} - \frac{1}{2} (\delta_{ij} T_{kj} + \delta_{ik} T_{lj}) - \frac{1}{2} (T_{ik} \delta_{ij} + T_{il} \delta_{jk}) \right\} D_{kl} \quad (338)$$

- これより以下のように表すことができる.

$$\bar{C}_{ijkl}^{ep} = C_{ijkl}^{ep} - \frac{1}{2} (\delta_{il} T_{kj} + \delta_{ik} T_{lj}) - \frac{1}{2} (T_{ik} \delta_{jl} + T_{lj} \delta_{jk}) \quad (339)$$

弾塑性構成則マトリックス 3

- 前述のように ${}^t\dot{S}_{ij}$ のマトリックス表示を行なうと ${}^t\dot{S} = C : D$ として作成した構成則マトリックスに以下のマトリックスを加えれば良いことが分かる.

$$\begin{bmatrix}
 -2T_{11} & 0 & 0 & -T_{21} & 0 & -T_{31} \\
 0 & -T_{22} & 0 & -T_{21} & -T_{23} & 0 \\
 0 & 0 & -2T_{22} & -T_{21} & -T_{23} & -T_{31} \\
 -T_{12} & -T_{12} & 0 & -\frac{1}{2}(T_{11} + T_{22}) & \frac{1}{2}T_{31} & -\frac{1}{2}T_{23} \\
 0 & -T_{23} & -T_{23} & -\frac{1}{2}T_{31} & -\frac{1}{2}(T_{22} + T_{33}) & -\frac{1}{2}T_{12} \\
 -T_{31} & 0 & -T_{31} & -\frac{1}{2}T_{23} & -\frac{1}{2}T_{12} & -\frac{1}{2}(T_{11} + T_{33})
 \end{bmatrix} \quad (340)$$

弾塑性構成則マトリックス 4

- 相対 Kirchhoff 応力の Jaumann 速度以外だとどうなるのか

$${}^t\dot{\mathbf{S}} = {}^t\hat{\mathbf{T}}^{(J)} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \quad (341)$$

$$= \mathbf{C}^{ep} : \mathbf{D} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \quad (342)$$

- 弱形式は必ず Truesdell 応力速度 ${}^t\dot{\mathbf{S}}$ をもちいる

$${}^t\dot{\mathbf{S}} = {}^t\hat{\mathbf{T}}^{(O)} \quad (343)$$

$$= {}^t\hat{\mathbf{T}}^{(O)} + (\text{tr} \mathbf{D}) \mathbf{T} \quad (344)$$

$$= {}^t\hat{\mathbf{T}}^{(J)} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} + (\text{tr} \mathbf{D}) \mathbf{T} \quad (345)$$

$$= {}^t\hat{\mathbf{T}}^{(J)} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \quad (346)$$

- たとえば, ${}^t\hat{\mathbf{T}}^{(J)}$ を使うと前述のマトリックスに $(\text{tr} \mathbf{D}) \mathbf{T}$ を追加する必要がある. マトリックス表示すると

$$\begin{aligned} S_{11} &= T_{11}(D_{11} + D_{22} + D_{33}) \\ S_{22} &= T_{22}(D_{11} + D_{22} + D_{33}) \\ S_{33} &= T_{33}(D_{11} + D_{22} + D_{33}) \\ S_{12} &= T_{12}(D_{11} + D_{22} + D_{33}) \\ S_{23} &= T_{23}(D_{11} + D_{22} + D_{33}) \\ S_{31} &= T_{31}(D_{11} + D_{22} + D_{33}) \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (347)$$

演習

- 高次 Mooney-Rivlin 体の縦弾性係数と剪断弾性係数がそれぞれ $6(c_1 + c + 2)$, $2(c_1 + c_2)$ となることを確認せよ。
- OHP の p.25 で示されている Lagrange 未定乗数の意味を確認せよ。
- 非圧縮性超弾性体の接線剛性マトリックスが、式 (152) で示されているようになることを確認せよ。
- 微圧縮性超弾性体の接線剛性マトリックスが、式 (203) で示されているようになることを確認せよ。
- 微小変形の場合の完全弾塑性体の構成則テンソルが式 (245) になることを確認せよ。
- 有限変形を仮定した場合の完全弾塑性体の構成則テンソルが式 (293) になることを確認せよ。
- 有限変形を仮定した場合の応力積分が (305) となることを確認せよ。
- (306) から (347) までを確認せよ。