

クレジット：

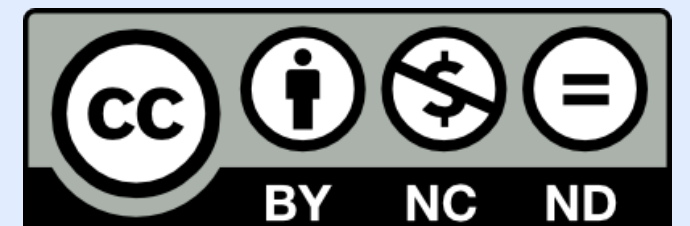
UTokyo Online Education 学術俯瞰講義 2016 金井雅彦

ライセンス：

利用者は、本講義資料を、教育的な目的に限ってページ単位で利用することができます。特に記載のない限り、本講義資料はページ単位でクリエイティブ・コモンズ 表示-非営利-改変禁止 ライセンスの下に提供されています。

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

本講義資料内には、東京大学が第三者より許諾を得て利用している画像等や、各種ライセンスによって提供されている画像等が含まれています。個々の画像等を本講義資料から切り離して利用することはできません。個々の画像等の利用については、それぞれの権利者の定めるところに従ってください。



2016 年度 S セメスター

学術俯瞰講義

「図形から広がる数理科学」

金井雅彦

「多面体をめぐって」

第2話：コーシーの 剛性定理と変形する多面体

コーシーの剛性定理 (1813) 閉かつ凸な多面体はつねに堅い.

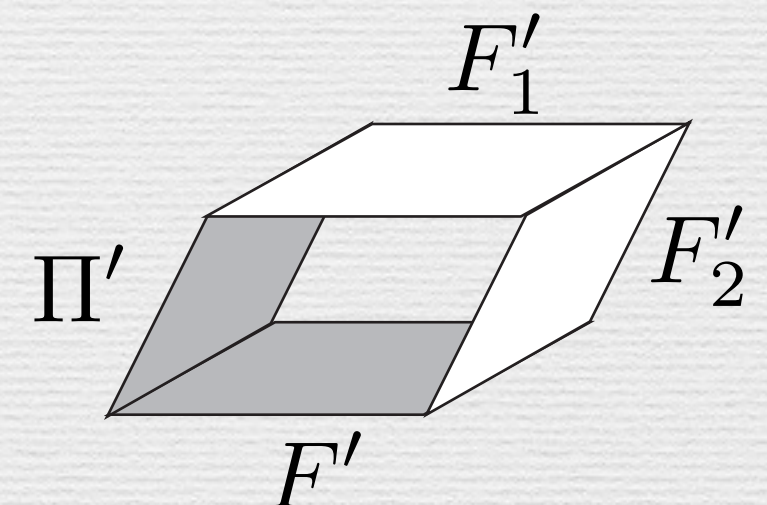
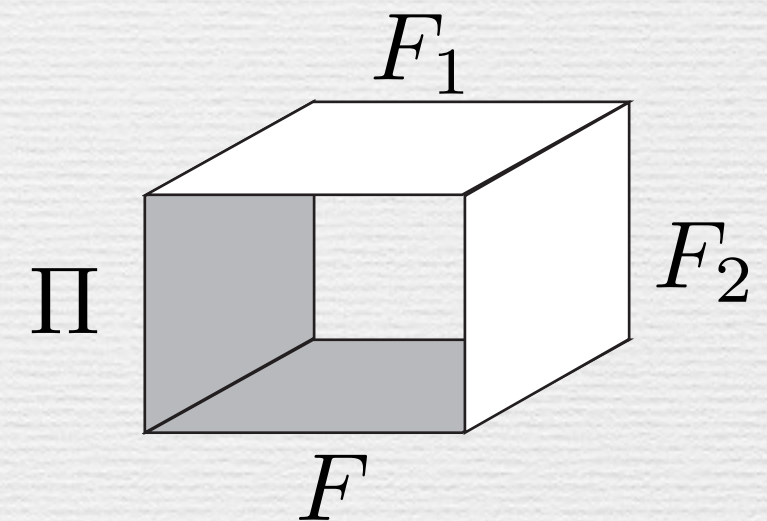
閉 ……その多面体により空間が**内部**と**外部**に分けられる

凸 ……その多面体の内部に相異なる2点を任意にとったとき、それらを結ぶ線分はその多面体の内部にとどまる.

以下が成り立つとき、多面体 Π' は多面体 Π の**変形**であると言われる：

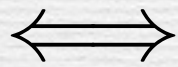
- Π の各面 F に対し Π' の面 F' が1対1に対応している；
- F は F' と合同である；
- Π の面 F_1 と F_2 が隣り合う必要十分条件は、対応する Π' の面 F'_1 と F'_2 が隣り合うことである；

注意： F_1 と F_2 の間の偏角と F'_1 と F'_2 の間の偏角は等しいとは限らない.



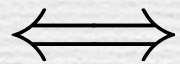
コーシーの剛性定理 (1813) 閉かつ凸な多面体はつねに堅い.

多面体 Π が**堅い**

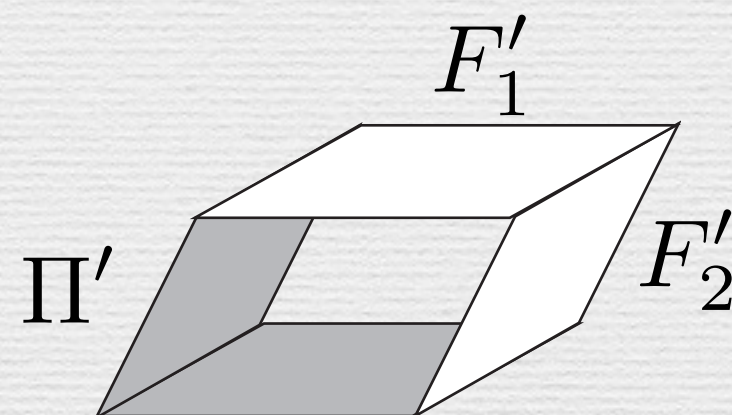
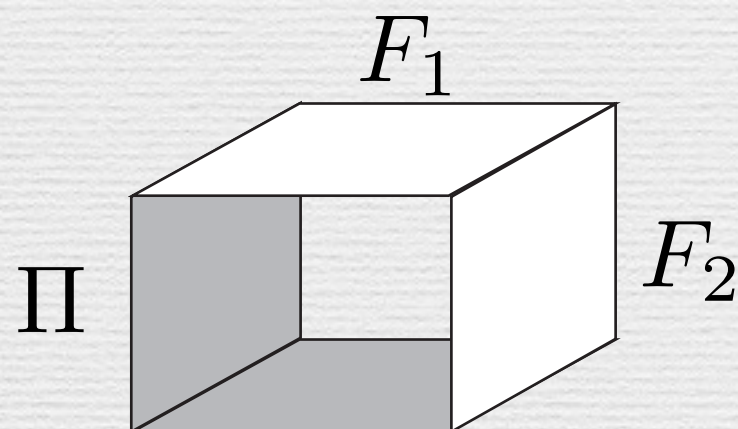


def

多面体 Π' が多面体 Π の**変形**であるのは,
 Π' が Π に合同である場合に限る.



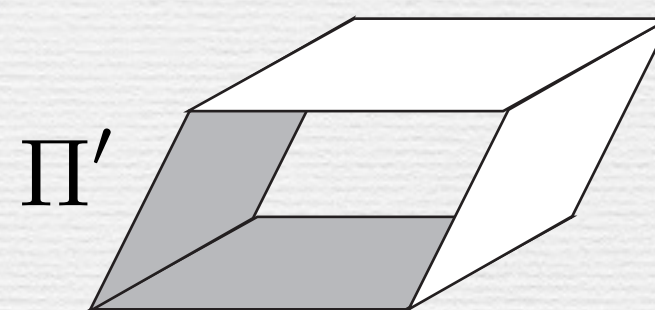
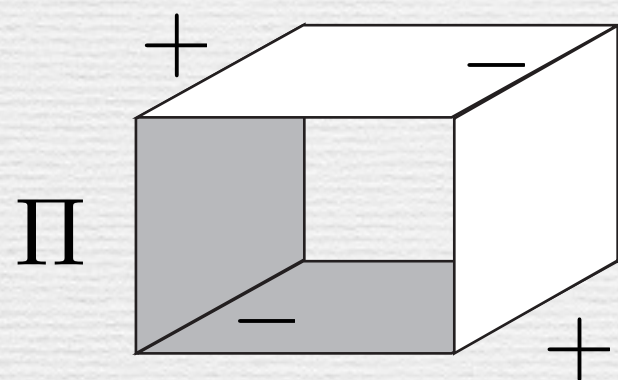
多面体 Π' が多面体 Π の**変形**であるとしたとき, Π の
隣り合う面 F_1 と F_2 の間の偏角と, 対応する Π' の面 F'_1, F'_2
の間の偏角がつねに等しい.



堅くない多面体

コーシーの剛性定理の証明の概略 背理法による.

Π , Π' を閉かつ凸な多面体とする. さらに, Π' は Π の変形であるが, Π には合同でないとする.

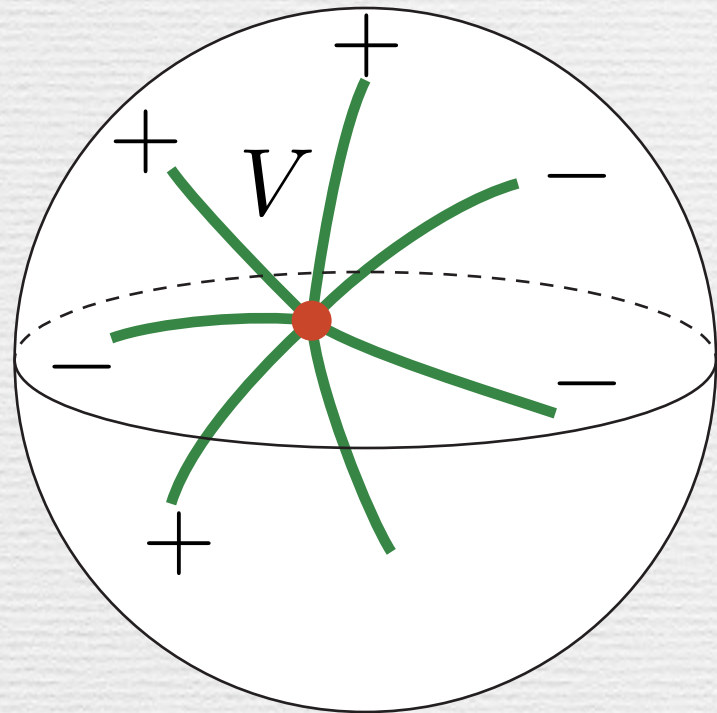


Π の辺 E とそれに対応する Π' の辺 E' に対し, E における偏角が E' における偏角より小さい場合には E に + の符号を, また大きい場合には - の符号を与える.

多面体 Π から球面グラフ G を作る.

Π の辺に与えられた符号に応じて, G の辺にも符号が与えられる.

G の各頂点 V に対し，そこから生えている辺の符号を順に見ていく． V の周りをひと回りしたときに符号が何回変化するか，その回数を頂点 V の**指数**と呼ぶ．

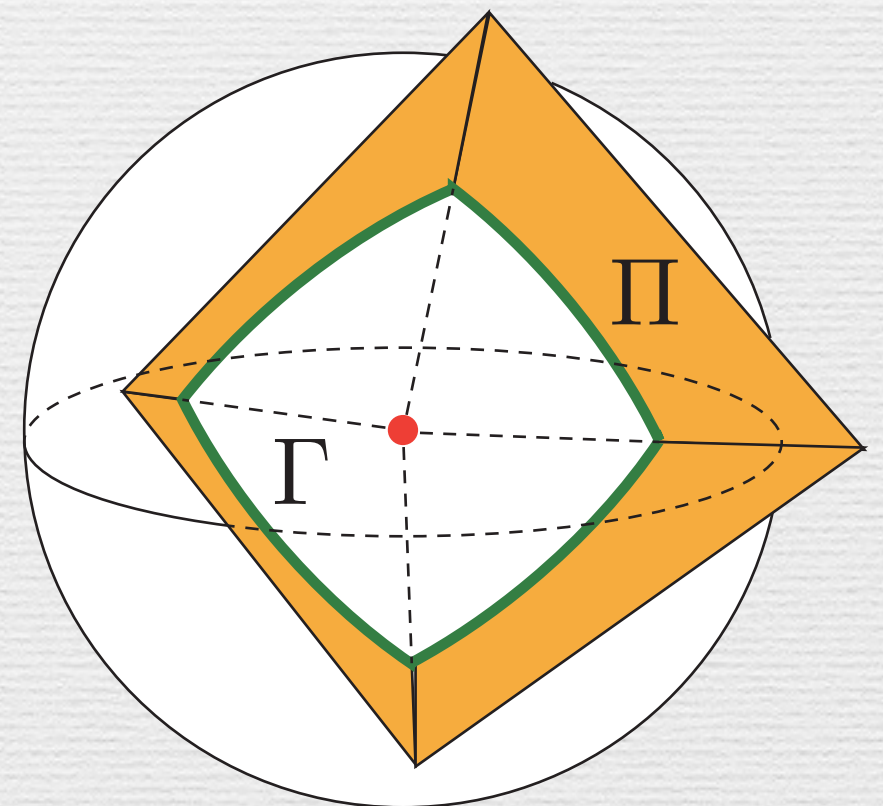


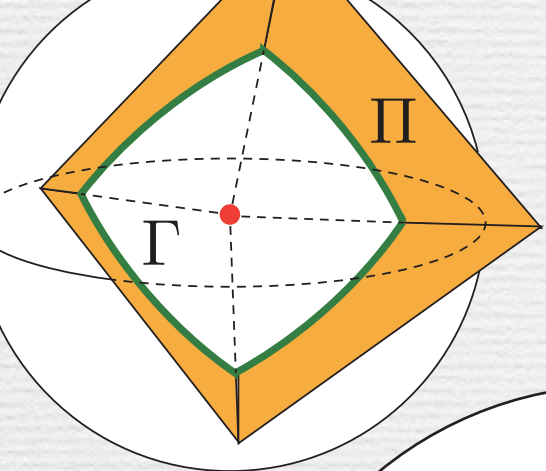
(指数) = 4

命題. G の各頂点に対し，そこから生えている辺には一切符号がついていないか，あるいは，その頂点の指数は4以上である．

命題の説明

Π の各頂点に対し，それを中心とする半径の十分小さな球面をとる．その球面と Π の交わりとして凸な球面多角形 Γ を得る．





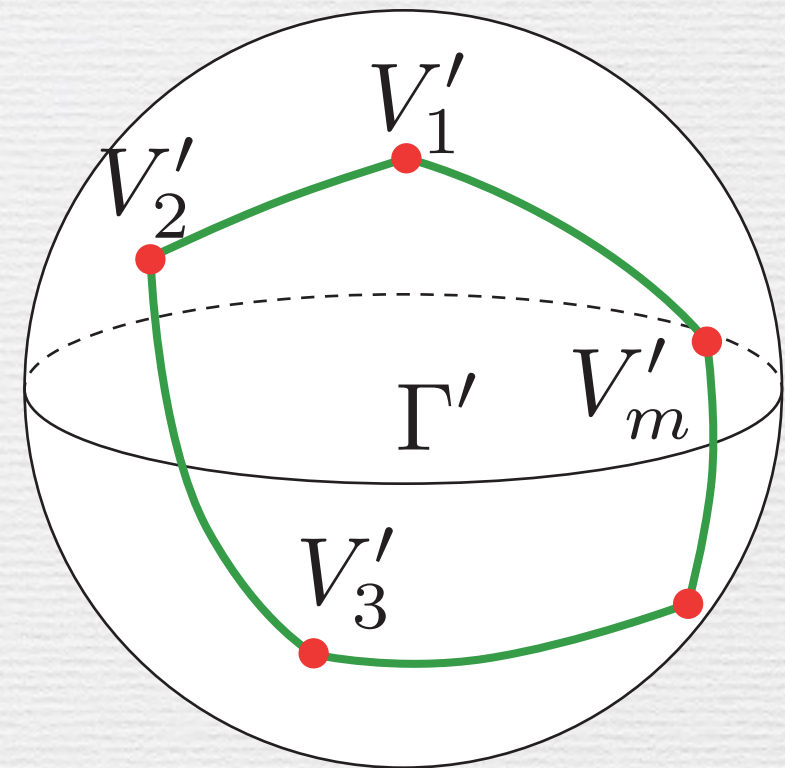
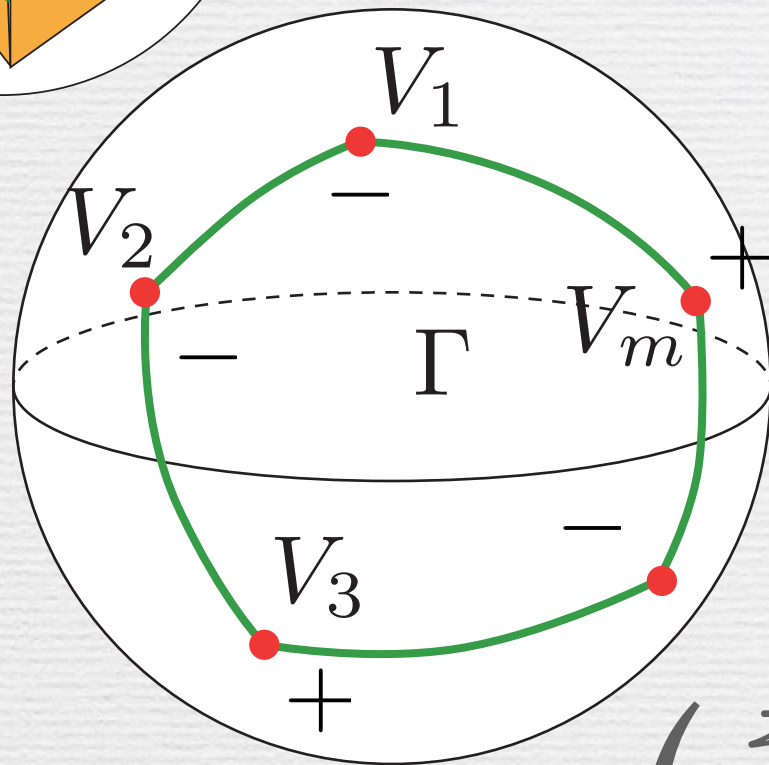
Π' から同様にして凸な球面多角形 Γ' が得られる.

$$V_1 V_2 = V'_1 V'_2$$

\vdots

$$V_{m-1} V_m = V'_{m-1} V'_m$$

$$V_m V_1 = V'_m V'_1$$



$\angle V_j =$ (その頂点を端点とするふたつの辺に
対応する Π のふたつの面の間の偏角)

$\angle V_j < \angle V'_j \Rightarrow V_j$ に $+$ $\angle V_j > \angle V'_j \Rightarrow V_j$ に $-$

命題

\Leftarrow

Γ の頂点には符号が一切ついていないか, あるいは
 Γ を1周したときの符号の変化は4以上.

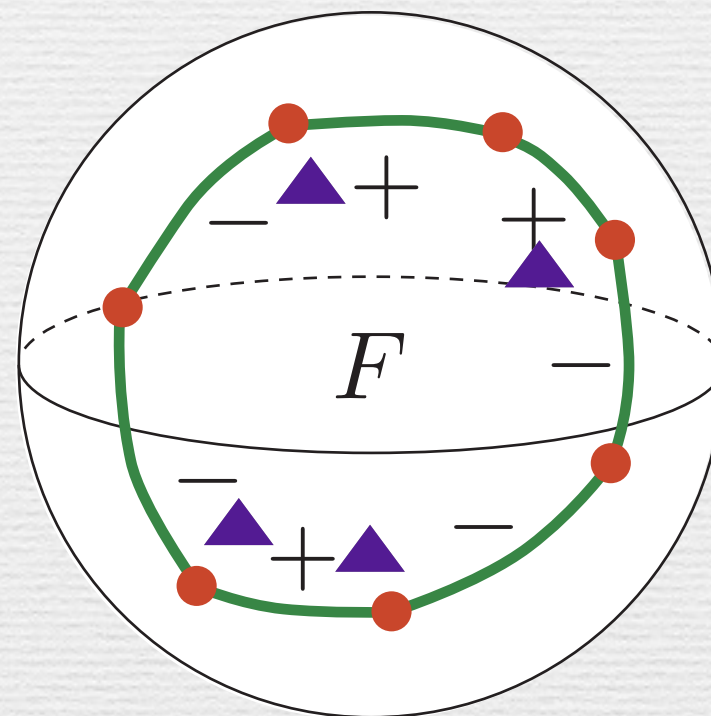
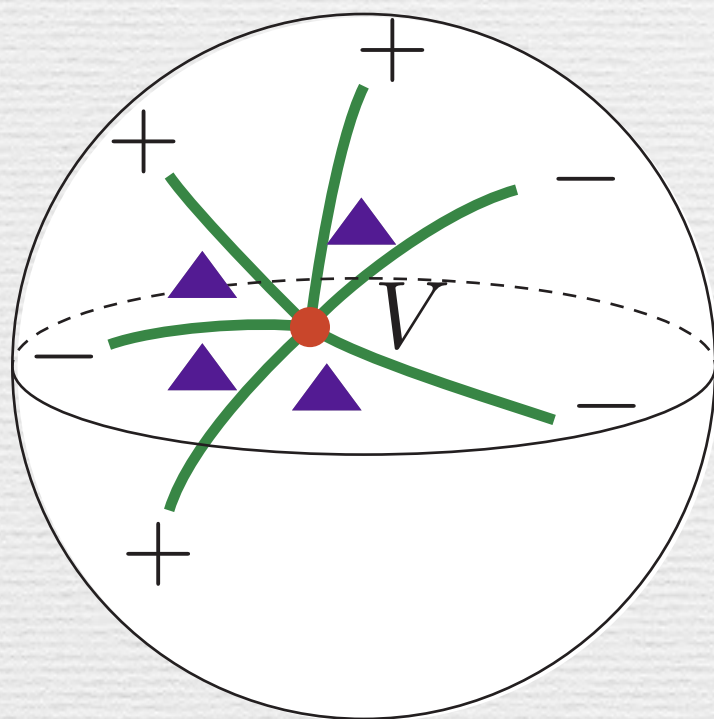
閉かつ凸な **多面体** の変形 \Rightarrow 凸な球面 **多角形** の変形

命題の説明終わり

命題は仮定して，コーシーの剛性定理の証明を続ける．

G から符号の付いていない辺をとり除くことにより得られるグラフの連結成分をひとつとり， G_1 とする．

G_1 の各面 F に対し，その周を1周したときに辺の符号が何回変化するか，その回数を F の**指数**と呼ぶ．



(指数) = 4

$$\left(G_1 \text{ の } \textbf{頂点} \text{ の指数の総和} \right) = \left(G_1 \text{ の } \textbf{面} \text{ の指数の総和} \right) \quad (*)$$

$$(\text{\textit{G}}_1 \text{ の頂点の指数の総和}) = (\text{\textit{G}}_1 \text{ の面の指数の総和}) \quad (*)$$

v — 頂点 (vertex) の数

e — 辺 (edge) の数

f — 面 (face) の数

命題. G の各頂点に対し, そこから生えている辺には一切符号がついていないか, あるいは, その頂点の指数は4以上である.

f_n — n 角形である面の数

命題より $4v \leq ((*) \text{ の左辺})$

$$((*) \text{ の右辺}) \leq 2f_3 + \sum_{n \geq 4} n f_n$$

$$\therefore 4v \leq 2f_3 + \sum_{n \geq 4} n f_n \quad (**)$$

G_1 に対するオイラーの公式

$v - e + f = 2$ に

$$f = \sum_{n \geq 3} f_n, \quad e = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 3} n f_n$$

v — 頂点の数

e — 辺の数

f — 面の数

f_n — n 角形である面の数

を代入すると,

$$\sum_{n \geq 3} (2n - 4) f_n = 4v - 8$$

$n \geq 4$ のとき $2n - 4 \geq n$ であるから

$$2f_3 + \sum_{n \geq 4} n f_n \leq 4v - 8$$

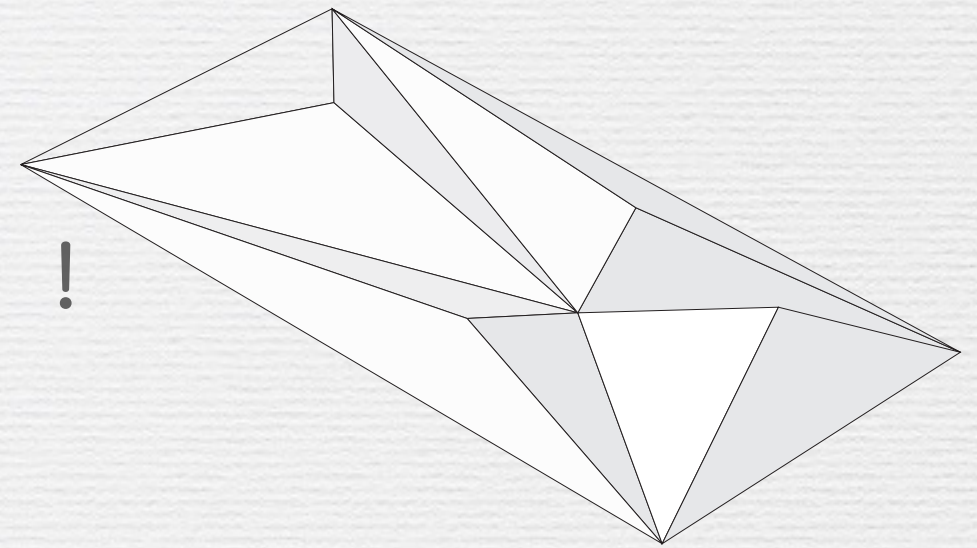
ところが, これは以下に矛盾.

$$\therefore 4v \leq 2f_3 + \sum_{n \geq 4} n f_n \quad (**)$$

証明終わり

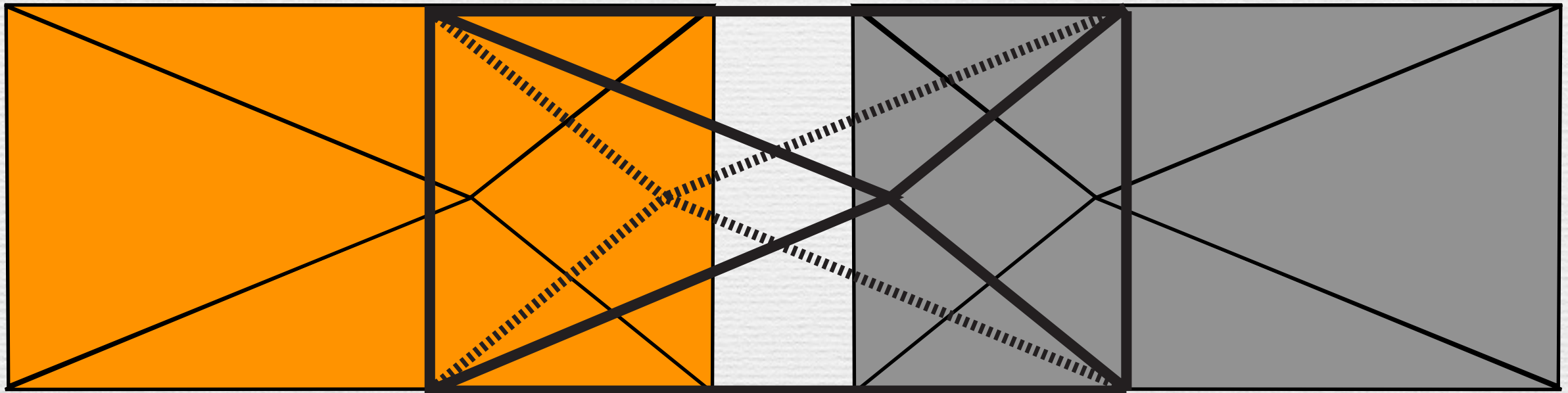
コネリーの発見 (1977)

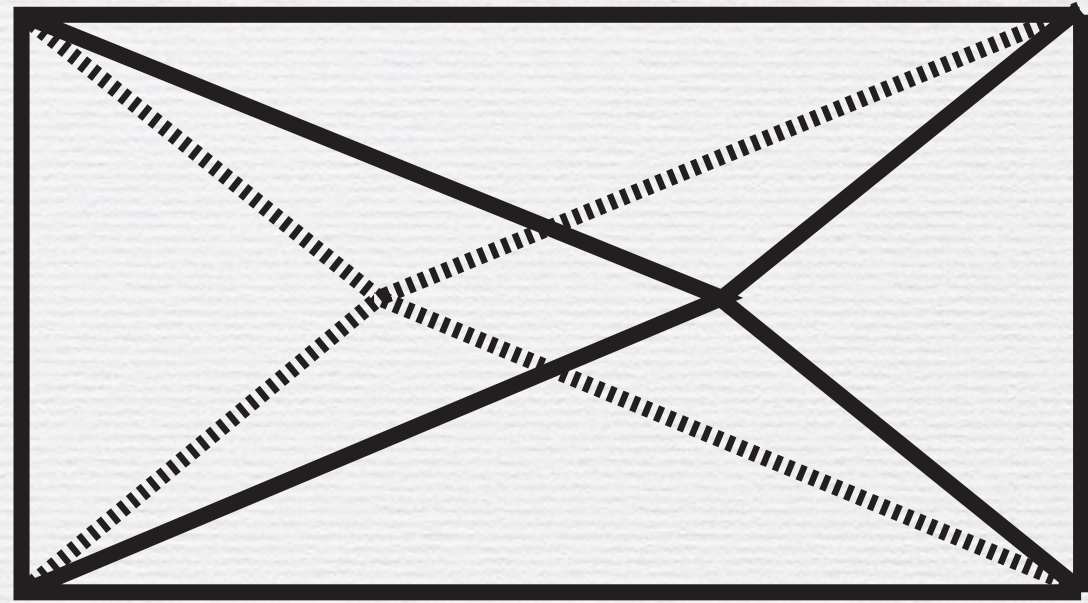
閉な多面体で**堅くないもの**が存在する！！



枠組み

ブリカールの~~潰れた8面体~~ (1897)





【材料】

- ・ ストロー 6本
- ・ ビニールひも 1本（2, 3本に割いて使う）
- ・ 針金 1本（ストローに針金を通すときに使う）
- ・ コピー用紙 1枚（原寸大の設計図を描くために使う）

【道具】

- ・ はさみ
- ・ 筆記具